Lección 4.2: Aplicaciones del principio del máximo. Unicidad en la clase de Tychonov. Principio de Duhamel.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$; $T > 0$

$\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ cilindro parabólico

$\Gamma_T := \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ frontera parabólica

Principio débil del máximo: si $u \in C(\bar{\Omega}_T)$ tal que $u_t, D_x u, D_x^2 u$ existen en Ω_T y satisface $u_t \leq \Delta u$ en Ω_T entonces

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

Aplicaciones: sea

$$C^{2,1}(\Omega_T) := \left\{ u \in C(\Omega_T) : \begin{array}{c} u_t, D_x u, D_x^2 u \ \exists \\ \text{en } \Omega_T \end{array} \right\}$$

Lema 1 (unicidad)

Para cualesquiera $f \in C(\bar{\Omega}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$ dadas, si $\exists$ $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ solución de

$$(2) \ldots \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega_T \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_T \end{cases}$$

entonces es única.

Nota: g representa datos iniciales y de frontera $\Gamma_T = \underbrace{(\partial\Omega \times (0,T))}_{\text{"lados"}} \cup \underbrace{(\Omega \times \{t = 0\})}_{\text{"base"}}$

Dem. Si $\exists$ dos soluciones, u_1, u_2 entonces $u := u_1 - u_2 \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{en } \Omega_T \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_T \end{aligned}$$

Aplicando el principio débil del máximo a u y a $-u$:

$$\max_{\bar{\Omega}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u| = 0$$

unicidad $\square$

Lema 2 Sea $c = c(x,t)$ continua en Ω_T con $c \geq 0$. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ satisface

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \quad \text{en} \quad \Omega_T$$

Entonces u alcanza en Γ_T su máximo no negativo:

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+$$

donde $u^+ := \max\{u, 0\}$.

Dem. caso 1: $u_t - \Delta u + cu < 0$ en Ω_T

supongamos que $\exists\ (x_0, t_0) \in \Omega_T$ tal que

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} u$$

Por ser máximo: $\nabla u(x_0,t_0) = 0$

$u_t(x_0,t_0) = 0$

$\Delta u(x_0,t_0) \leq 0$ (máx.)

$$\therefore \quad c(x_0,t_0)u(x_0,t_0) < \underbrace{\Delta u(x_0,t_0)}_{\leq 0} - \underbrace{u_t(x_0,t_0)}_{=0} \leq 0$$

$c \geq 0$ esto implica que $u(x_0,t_0) < 0$.

Por lo tanto: $\max_{\Omega_T} u \leq 0 \leq \max_{\Gamma_T} u^+$

concluimos que $\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+$

Caso 2: caso general $u_t - \Delta u + cu \leq 0$

Definimos $u^\epsilon := u - \epsilon t$ con $\epsilon > 0$.

$$\partial_t u^\epsilon - \Delta u^\epsilon + cu^\epsilon = \underbrace{u_t - \Delta u + cu}_{\leq 0} \underbrace{- \epsilon - c\epsilon t}_{<0} < 0$$

Aplicando caso 1:

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u^\epsilon = \max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} (u^\epsilon)^+$$
$$= \max_{\Gamma_T} (u - \epsilon t)^+$$
$$\leq \max_{\Gamma_T} u^+ + \epsilon T$$

Tomando $\epsilon \to 0^+$ obtenemos el resultado $\square$

Lema 3 Sea $c = c(x,t)$ continua en Ω_T tal que $c \geq -c_0$, con $c_0 > 0$ constante. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ satisface

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T$$
$$u \leq 0 \quad \text{sobre } \Gamma_T$$

Entonces $u \leq 0$ en $\overline{\Omega_T}$.

Dem. Sea $v(x,t) := e^{-c_0 t} u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$

$$u = e^{c_0 t} v \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_t &= c_0 e^{c_0 t} v + e^{c_0 t} v_t \\ \Delta u &= e^{c_0 t} \Delta v \end{aligned}$$

$$\therefore \quad u_t - \Delta u + cu = e^{c_0 t} \big(\underbrace{v_t - \Delta v + (c + c_0) v}_{\leq 0} \big) \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T$$

Aquí $c + c_0 \geq 0$. Aplicando el lema 2

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v \leq \max_{\Gamma_T} v^+ = \max_{\Gamma_T} e^{-c_0 t} u^+ \underset{\substack{u \leq 0 \\ \text{en } \Gamma_T}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega_T}} e^{-c_0 t} u \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u \leq 0 \quad \text{en } \overline{\Omega_T}$$

$\square$

Corolario (principio de comparación)
Mismas hipótesis de $c = c(x,t)$ del Lema 3.
Si $u, v \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ tales que

$$u_t - \Delta u + cu \leq v_t - \Delta v + cv \quad \text{en } \Omega_T$$
$$u \leq v \quad \text{en } \Gamma_T$$

entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega_T}$.

Lema 4 Sean $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ soluciones de
$$\partial_t u_1 - \Delta u_1 = f_1 \quad \text{en } \Omega_T$$
$$\partial_t u_2 - \Delta u_2 = f_2$$
con $f_j \in C(\overline{\Omega_T})$, $j = 1,2$. Entonces :

(a) Si $u_1 \geq u_2$ en Γ_T y $f_1 \geq f_2$ en Ω_T entonces $u_1 \geq u_2$ en $\overline{\Omega_T}$.

(b) $\max\limits_{\overline{\Omega_T}} |u_1 - u_2| \leq \max\limits_{\Gamma_T} |u_1 - u_2| + T \max\limits_{\overline{\Omega_T}} |f_1 - f_2|$

Nota: El inciso (b) además de unicidad implica continuidad con respecto a los datos

Dem. (a) Directa aplicación del principio débil del máx.

(b) Sea $M := \max\limits_{\overline{\Omega_T}} |f_1 - f_2| \geq 0$.

Definimos $w := u_1 - u_2 - Mt$. Entonces

$$w_t - \Delta w = f_1 - f_2 - M \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T$$

Principio del máx :

$$\max_{\overline{\Omega_T}} w \leq \max_{\Gamma_T} (u_1 - u_2 - Mt) \leq \max_{\Gamma_T} |u_1 - u_2|$$

Además $\max\limits_{\overline{\Omega_T}} w = \max\limits_{\overline{\Omega_T}} (u_1 - u_2 - Mt) \geq \max\limits_{\overline{\Omega_T}} (u_1 - u_2) - MT$

$$\therefore \quad \max_{\bar{\Omega}_T} (u_1 - u_2) \leq \max_{\Gamma_T} |u_1 - u_2| + MT$$

Análogamente con $w = u_2 - u_1 - Mt$.

$$\Rightarrow (b) \qquad \square$$

Observación: si $u_j = g_j$, $j = 1,2$ sobre Γ_T y

$$\max_{\Gamma_T} |g_2 - g_1| < \epsilon, \quad \max_{\bar{\Omega}_T} |f_2 - f_1| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$, entonces $\displaystyle\max_{\bar{\Omega}_T} |u_1 - u_2| \leq \epsilon(1+T)$.

Problema global de Cauchy: hallamos solución. Si la solución satisface una condición adicional entonces es única.

Existen soluciones <u>no</u> triviales al problema de Cauchy homogéneo que <u>no</u> están en esa clase.

<u>Teorema</u> Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ con $T > 0$, una solución al problema global de Cauchy:

$$(3) \cdots \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

con $g \in C(\mathbb{R}^n)$, que además satisface

(4) ... $$|u(x,t)| \leq M e^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in [0,T]$$

con $M, a > 0$ constantes (condición de Tychonov). Entonces,

(5) ... $$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

__Dem.__ Basta con probar en el caso

$$4aT < 1 \quad \cdots (6)$$

caso general: $[0,T] = [0,T_1] \cup [T_1, 2T_1] \cup \cdots$
$\cdots \cup [kT_1, (k+1)T_1]$
para cierto $k \in \mathbb{N}$, con $T_1 = \frac{1}{8a}$, $(k+1)T_1 > T$.

De modo que $$\sup_{\mathbb{R}^n \times [jT_1, (j+1)T_1]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

$$\therefore \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

Bajo (6) sea $\epsilon > 0$ tal que

$$4a(T+\epsilon) < 1 \quad \cdots (7)$$

Sean $y \in \mathbb{R}^n$, __fijo__, $\mu > 0$ una constante. Sea:

(8) ... $$v_\mu(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu\, e^{|x-y|^2/4(T+\epsilon-t)}}{(4\pi(T+\epsilon-t))^{n/2}}$$

$$= u(x,t) - \mu \Psi\left(i(x-y), T+\epsilon - t\right)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]$$

$\Psi(x-y,t)$ es solución de la ecuación del calor. Así,

$$(\partial_t - \Delta_x)\, \Psi\big(\underbrace{i(x-y), T+\epsilon-t}_{('')}\big) = -\partial_t \Psi('') + \Delta_x \Psi('')$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (\partial_t - \Delta_x)\, v_\mu = u_t - \Delta u + \mu (\partial_t - \Delta_x)\Psi('') = 0.$$

$$\forall \mu > 0$$

Sea $r>0$, arbitrario. Se definen

$$\Omega := B_r(y), \qquad \Omega_T = \Omega \times (0,T]$$

$$= B_r(y) \times (0,T]$$

Principio del máximo:

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v_\mu \le \max_{\Gamma_T} v_\mu$$

En la "base" de Ω_T, $\quad B_r(y) \times \{t=0\}$ en vista de $\mu \Psi > 0$:

$$v_\mu(x,0) = u(x,0) \underbrace{- \mu \Psi\left(i(x-y), T+\epsilon\right)}_{\le 0} \le u(x,0)$$

$$\le \sup_{B_r(y)} g.$$

En "lados": $|x-y| = r, \quad 0 \le t < T$

$$v_\mu(x,t) \underset{(4)}{\le} Me^{a|x|^2} - \mu \frac{e^{r^2/4(T+\epsilon-t)}}{\left(4\pi(T+\epsilon-t)\right)^{n/2}}$$

$$\le Me^{a(|y|+r)^2} - \mu \frac{e^{r^2/4(T+\epsilon)}}{\left(4\pi(T+\epsilon)\right)^{n/2}}$$

$|x|-|y| \le r$

$T+\epsilon-t \le T+\epsilon$

$$a < \frac{1}{4(T+\epsilon)} \Rightarrow \frac{1}{4(T+\epsilon)} = a+\rho, \quad \text{con } \rho>0$$

$$\Rightarrow v_\mu(x,t) \le Me^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu e^{r^2(a+\rho)}}{\pi^{n/2}} \cdot (a+\rho)^{n/2}$$

$$\forall (x,t) \in \Gamma_T$$

Tomando $r \gg 1$ suf. grande obtenemos

$$v_\mu(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

ya que

$$v_\mu(x,t) \le e^{ar^2}\Big[\underbrace{Me^{2|y|ra + a|y|^2}}_{O(e^r)} \underbrace{- \mu e^{r^2\rho}\left(\frac{a+\rho}{\pi}\right)^{n/2}}_{\substack{O(e^{r^2}) \\ \text{término dominante}}}\Big]$$

Para $\Omega_T = B_r(y) \times (0,T]$, con $r \gg 1$

$$v_\mu(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g \qquad \forall (x,t) \in \Gamma_T$$

$$\therefore \max_{\Omega_T} v_\mu \le \sup_{\mathbb{R}^n} g, \quad \forall \mu > 0$$

Tomando lím cuando $\mu \to 0^+$

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

Tomando lím cuando $r \to \infty$

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \qquad \square$$

Corolario En la clase de soluciones que satisfacen la condición de Tychonov hay unicidad. En particular

$$(10) \cdots u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} g(y)\, dy$$

$= \Phi(x-y,t)$

es la única sol. en esa clase.

Dem. u_1, u_2 dos soluciones en la clase

$v := u_1 - u_2$ se queda en esa clase:

$$|v| \leq |u_1| + |u_2| \leq M_1 e^{a_1|x|^2} + M_2 e^{a_2|x|^2}$$

$$\leq M e^{a|x|^2} \qquad M = \max M_j \quad a = \max a_j$$

v es solución de $v_t - \Delta v = 0$, $v(x,0) = 0$.

x Teorema a v y $-v$:

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} |v| \leq 0 \qquad \forall\, T > 0 \text{ arbitrario}$$

$\therefore \quad v \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ unicidad

La solución en (10) ($|g| \leq c$) claramente pertenece a la clase ya que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) \equiv 1 \quad \forall t$ (ejercicio). $\square$

Existen soluciones que no pertenecen a la clase:

<u>Proposición</u> (Tychonov) Existe una familia de soluciones <u>no</u> triviales al problema de Cauchy:

$$(11) \cdots \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solución trivial de (11), $u(x,t) \equiv 0$ está en la clase definida x (6).

(ver página.)

Bajo hipótesis apropiadas la solución (10) decae cuando $t \to \infty$

<u>Lema</u> Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Entonces $u(x,t)$ definida en (10) existe y satisface

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{si } t \to \infty$$

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy < \infty .$$

Dem. Inmediata : $e^{-|x-y|^2/4t} \leq 1 \Rightarrow$
estimación $\square$

Nota : si $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ claramente (10) es solución de $(\partial_t - \Delta) u = 0$. Se puede demostrar que

$$\lim_{\substack{(x,t) \to (x_0, 0) \\ t > 0}} u(x,t) = g(x_0)$$

(ejercicio).

Principio de Duhamel

Consideremos el problema :

$$(1) \cdots \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = h , & x \in \mathbb{R}^n , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

donde $h(x,t)$ es conocida.

Si $u_p = u_p(x,t)$ es sol. de (1) entonces

$$u_p(x,t) + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$$

es solución al problema general

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = h, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u = g, & x \in \mathbb{R}^n,\ t = 0 \end{cases}$$

por linealidad.

El mapeo $(x,t) \longmapsto \Phi(x-y, t-s)$ es solución de $(\partial_t - \Delta_x \Phi) = 0$ $\forall$ $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (s,\infty)$ para cualquier elección $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,t)$, fijo, pero arbitrario.

Principio de Duhamel: para $0 \leq s < t$ consideramos el problema homogéneo

$$(2) \cdots \begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ s < t < \infty \\ w(x,s,s) = h(x,s), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

una solución de (2) está dada

$$(3) \cdots w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\, h(y,s)\, dy$$

Definimos:

$$(4) \cdots u(x,t) = \int^t w(x,t,s)\, ds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4(t-s)}\, h(y,s)\, dy\, ds$$

Por simplicidad vamos a requerir h tenga sop. compacto en el espacio-tiempo.

Teorema Sea $h \in C_0^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, conocida. Entonces $u = u(x,t)$ definida en (4) satisface:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
(b) $u_t - \Delta u = h, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
(c) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Dem. Notamos que Φ tiene una singularidad en $(0,0)$. No podemos derivar bajo el signo de integración. La hipótesis $h \in C_0^2 \Rightarrow$ { Φ es suave cerca de $t = s > 0$. cambio de variables.

Sean $\xi = x - y$, $\tau = t - s$:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi,\tau)\, h(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, h(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

Derivando (Φ es suave cerca de $t = s > 0$ y $h \in C_0^2$) :

$$u_t = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, h(x-y,0)\, dy \quad +$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, h_t\, (x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$\Delta_x u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, \Delta_x h\, (x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$\partial_{x_j} u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, \partial_{x_j} h\, (\;\text{''}\;)\, dy\, ds$$

$$\partial^2_{x_i x_j} u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, \partial^2_{x_i x_j} h\, (\text{''})\, dy\, ds$$

$h \in C_0^2 \Rightarrow u, u_t, Du, D^2u$ son continuas

$\Rightarrow$ (a)

(b) : $$u_t - \Delta_x u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, (\partial_t - \Delta_x)\, h(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, h(x-y,0)\, dy$$

$$=: I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + J$$

donde

$$I_1(\epsilon) := \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, (-\partial_s - \Delta_y)\, h(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$I_2(\epsilon) := \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} (\quad \text{''} \quad)$$

$$J = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\, h(x-y,0)\, dy$$

como $h \in C_0^2 \Rightarrow \exists\, K$ compacto tal que

$$|I_2(\epsilon)| \leq \left(\sup_K |h_t| + \sup_K |D^2 h| \right) \times$$

$$\times \int_0^\epsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, dy}_{\equiv 1}\, ds$$

$$\leq C\epsilon \qquad \therefore \quad I_2(\epsilon) \to 0 \text{ si } \epsilon \to 0^+$$

$$I_1(\epsilon) = \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} (-\partial_s - \Delta_y)\Phi(y,s)\, h(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\epsilon)\, h(x-y,\epsilon-s)\, dy$$

$$- \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,0)\, h(x-y,0)\, dy}_{=J}$$

$$\Rightarrow u_t - \Delta_x u = I_1(\epsilon) + J + I_2(\epsilon)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\epsilon)\, h(x-y,\epsilon-s)\, dy$$

$$+ I_2(\epsilon)$$

$$\longrightarrow h(x,t) \quad \text{si } \epsilon \to 0^+$$

misma demostración que en el caso homogéneo concluimos que $u_t - \Delta u = h$.

$$|u(x,t)| \leq \sup_{K} |h(y,s)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

$$\leq Ct \to 0 \quad \text{si } t \to 0^+.$$

$\square$

<u>Teorema</u> suponiendo $h \in C_0^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$
$g \in C(\mathbb{R}^n)$, $|g| \leq C$

entonces

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,g(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\,h(y,s)\,dy\,ds$$

es solución de clase $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ al problema global de Cauchy

$$(7) \ldots \begin{cases} u_t - \Delta u = h, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = g, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$