Lección 4.4: El teorema de Widder

Recordatorio:

(i) $g \in C(\mathbb{R}^n)$, acotada uniformemente

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy \quad \in C^\infty$$

es solución de $\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

(ii) Unicidad: si $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ entonces existe a lo más una solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

en la clase de soluciones que satisfacen

$$|u(x,t)| \leq A e^{a|x|^2} \qquad A, a > 0$$

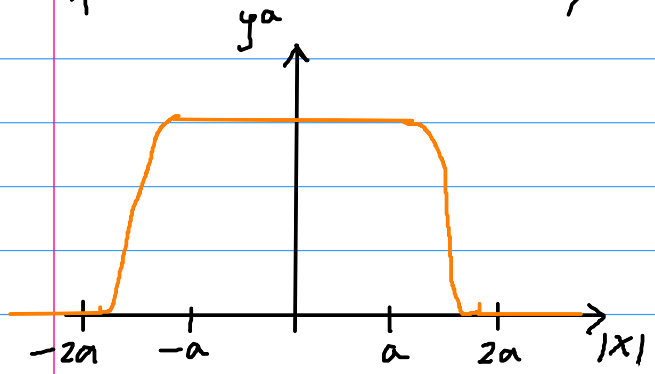
Lema 1 Sea $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ no negativa, solución de $u_t = \Delta u$. Entonces

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$$(1) \ldots \quad u(x,t) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u(y,0)\, dy$$

(En particular, la integral existe.)

Dem.: Sea $\varphi^a = \varphi^a(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, una función cut-off, $a > 1$, tal que:



- $\varphi^a \equiv 1$ en $B_a(0)$
- $\varphi^a = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{2a}(0)}$
- $\varphi^a \in C^\infty$

Definimos:

$$v^a(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) \underbrace{\varphi^a(y)\, u(y,0)}_{\text{es continua y acotada}} \, dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v^a = \Delta v^a \\ v^a(x,0) = \varphi^a(x)\, u(x,0) \end{cases}$$

$u \geq 0$, $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ $\Rightarrow$ $u(x,0) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\varphi^a \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{2a}(0)}$

$$\therefore \quad v^a(x,t) = \int_{B_{2a}(0)} \underbrace{\Phi(x-y,t)}_{\geq 0} \underbrace{\varphi^a(y)}_{\geq 0} \underbrace{u(y,0)}_{\geq 0} \, dy$$

$$\leq M_a \int_{B_{2a}(0)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t} \, dy$$

donde $|\varphi^a u(\cdot,0)| \leq M_a$.

Se puede demostrar que

$$\Psi(x-y,t) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|x-y|^n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2} \qquad \forall\, t>0 \quad \forall\, x\neq y.$$

(Ejercicio.)

$$v^a(x,t) \leq M_a \frac{\omega_n (2a)^n}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(|x|-2a)^n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}$$

$|x-y| \geq |x|-2a$ si $y\in B_{2a}(0)$

$\forall\, |x|>2a.$

Sea $\epsilon>0$ y $\rho > 2a + \underbrace{M_a \frac{\omega_n (2a)^n}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}}_{=:\,K_n(a)} \cdot \frac{1}{\epsilon}$

$$= 2a + \frac{K_n(a)}{\epsilon}$$

$\therefore$ Si $|x|>\rho$, $0<t<T$, tenemos:

$$\rho - 2a > \frac{K_n(a)}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{K_n(a)}{\rho-2a} > \frac{K_n(a)}{|x|-2a} \geq v^a(x,t)$$

$$\therefore \quad v^a(x,t) < \epsilon \leq \epsilon + u(x,t), \quad \begin{array}{l}|x|>\rho \\ 0<t<T\end{array}$$

$$v^a(x,t) \leq u(x,0) \leq \epsilon + u(x,0) \quad \text{si } |x|\leq\rho$$

$$v^a(x,0) = \underbrace{\zeta^a(x)}_{\leq 1} u(x,0)$$

Además, si $|x| = \rho$

$$v^a(x,t) < \epsilon \leq \epsilon + u(x,t), \quad \begin{array}{l} |x| = \rho \\ 0 < t < T \end{array}$$

Por el principio débil del máximo en $|x| < \rho$

$$v^a(x,t) \leq \epsilon + u(x,t) \quad \forall \begin{array}{l} |x| \leq \rho \\ 0 \leq t < T \end{array}$$

Tomando $\rho \to \infty$ obtenemos

$$v^a(x,t) \leq \epsilon + u(x,t) \quad \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq t < T \end{array}$$

$\epsilon > 0$ arbitrario :

$$v^a(x,t) \leq u(x,t) \quad \begin{array}{l} \forall a > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0,T) \end{array}$$

(La integral $\exists$).

Teo. convergencia monótona : $\{f_n\}$ monótonamente creciente, $f_n \geq 0$. Entonces $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Como $(\varphi^a u)(y,0)$ es una sucesión de funciones ≥ 0, acotadas, monótonamente creciente, que converge a $u(y,0)$ cuando $a \to \infty$.

$$v(x,t) := \lim_{a\to\infty} v^a(x,t)$$

conv. monótona

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) \lim_{a\to\infty} \left(\zeta^a(y)\, u(y,0)\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u(y,0)\, dy$$

Además $\quad u(x,t) \geq v(x,t)$

$\square$

Núcleo de calor (regularidad) $\Rightarrow v^a \in C^\infty$

Lema 2 $\lim v^a = v = v(x,t)$ es solución de $v_t = \Delta v$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Mas aún, $v(x,0) = u(x,0)$.

Dem. Argumento similar (conv. monótona)

$$\partial_t v^a = \int_{B_{2a}(0)} \partial_t \Phi(x-y,t)\, \zeta^a(y)\, u(y,0)\, dy$$

$$\xrightarrow[a\to\infty]{} \partial_t v$$

$$\Delta v^a = \int_{B_{2a}(0)} \Delta\Phi(x-y,t)\, \zeta^a(y)\, u(y,0)\, dy$$

$$\xrightarrow[a\to\infty]{} \Delta v$$

$$\Rightarrow \quad v_t = \Delta v$$

Además, $\quad v^a(x,t) \leq v(x,t) \leq u(x,t)$

Tomando $\lim t \to 0^+ \quad v(x,0) = u(x,0)$
ya que $\quad v^a(x,0) = u(x,0) \quad , \quad \forall\, a>1.$

$\square$

Conclusión: $\quad w(x,t) := u(x,t) - v(x,t) \geq 0$
$\quad w(x,0) = 0$

y es solución de la ecuación del calor.

$\therefore$ w es solución de $\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ w = 0, & t = 0. \end{cases}$

Sea $\quad v(x,t) := \displaystyle\int_0^t w(x,s)\, ds.$

Es suficiente demostrar que $\quad v \equiv 0$
para concluir $\quad w \equiv 0 \quad$ (ya que $w \geq 0$).

Lema 3 $\quad v_t = \Delta v = w$. En particular v es no negativa, es solución de la ecuación del calor y es subarmónica como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para $t>0$ fijo.

Dem. $\quad$ Claramente $\quad v_t = w \geq 0.$

Además,
$$\Delta v = \int_0^t \Delta_x w(x,s)\, ds = \int_0^t \partial_s w(x,s)\, ds$$

$$= w(x,t) - \cancelto{0}{w(x,0)}$$

$$= w(x,t) \qquad \geq 0$$

$\square$

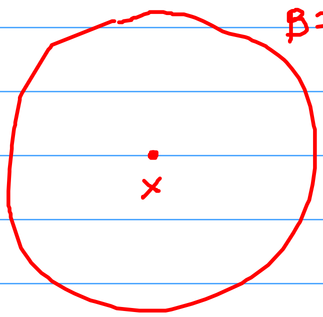
<u>Lema 4</u> Para cualquier $T>0$, y $0 \leq t < T$, tenemos

$$0 \leq U(x,t) \leq A \exp\left(a|x|^2\right) \quad \cdots (3)$$

con $a, A > 0$ independientes de t (pueden depender de $T>0$).

<u>Dem.</u> Sea $B := B_{|x|+1}(x)$.

$B = B_{|x|+1}(x)$



Sea $\tilde{T} > 0$ arbitrario.

Por lema 1:

$$U(0, t+\tilde{T}) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(-y, t+\tilde{T}) U(y,t)\, dy$$

$$\geq \int_{B_{|x|+1}(x)} \Phi(-y, t+\tilde{T}) U(y,t)\, dy$$

Pero $\Phi(-y, t+\tilde{T}) = \dfrac{1}{(4\pi(t+\tilde{T}))^{n/2}} e^{-|y|^2/4(t+\tilde{T})}$

$$\underset{t \geq 0}{\geq} c_1(\tilde{T})\, e^{-c_2(\tilde{T})|y|^2}$$

$$\frac{1}{(4\pi(t+\tilde{T}))^{n/2}} \leq \frac{1}{(4\pi\tilde{T})^{n/2}}$$

$$\frac{|y|^2}{4(t+\tilde{T})} \leq \frac{|y|^2}{4\tilde{T}} \iff e^{-|y|^2/4\tilde{T}} \leq e^{-|y|^2/4(t+\tilde{T})}$$

Por otro lado, si $y \in B$ entonces

$$|x-y| \leq |x|+1 \implies |y| \leq 2|x|+1$$

$$\therefore \quad |y|^2 \leq C_3 |x|^2$$

$$\implies e^{|y|^2} \leq e^{C_3|x|^2} \quad \underline{\text{si}} \quad y \in B.$$

Sustituyendo

$$v(0,t+\tilde{T}) \geq C_1(\tilde{T})\, e^{-C_2(\tilde{T})|y|^2} \int_B v(y,t)\,dy$$

$$\iff \int_B v(y,t)\,dy \leq C_4 e^{C_5|x|^2} v(0,t+\tilde{T})$$

Por subarmonicidad de v:

$$v(x,t) \leq \bar{C} \int_B v(y,t)\,dy \leq C_6 e^{C_5|x|^2} v(0,t+\tilde{T})$$

si $t \in [0,T]$ entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} v(0,t+\tilde{T}) = C(T,\tilde{T}) > 0$$

uniformemente acotada

Tomando $T = \tilde{T}$, $C_6 = 4A$, $C_5 = a$ obtenemos la conclusión

$\square$

<u>Teorema</u> (Widder, ~1970)

Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ es solución <u>no negativa</u> de

$$(4) \ldots \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

entonces u está determinada de manera única por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy.$$

<u>Dem.</u> Sea $v(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$

Por lemas 1 y 2:

- $u(x,t) \geq v(x,t)$
- $u(x,0) = v(x,0)$
- $w := u - v \geq 0$ es solución no negativa de $w_t = \Delta w$ con $w(x,0) = 0$.

Por lemas 3 y 4: $U(x,t) := \int_0^t w(x,s)\, ds$

es solución de $\begin{cases} U_t = \Delta U & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ U(x,0) = 0 \end{cases}$

que además satisface

$$0 \leq U(x,t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in [0,T].$$

Por unicidad en la clase de Tychonov:

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} U \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} U(x,0) = 0$$

$\therefore \quad U(x,t) \equiv 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T].$

$T > 0$ es arbitrario. Concluimos que

$$U(x,t) \equiv 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,\infty).$$

$\Rightarrow \quad w(x,t) \equiv 0$ " "

$\square$

Aplicación: la temp. en grados K es ≥ 0

Leer Salsa: solución de problemas con valores en la frontera usando
series de Fourier
transf. " " .