Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2021-1

Tarea 2: Ecuación de onda

1. (a) Haciendo una aproximación para el desplazamiento vertical de una cuerda elástica en una dimensión, deduce la ecuación de onda unidimensional,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h,$$

donde $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, $t > 0$. ¿Qué hipótesis se están suponiendo para hacer la aproximación? Expresa el valor de c en términos de la tensión y la densidad (por unidad de longitud) de la cuerda. Expresa el problema para distintos dominios unidimensionales I y con diferentes valores en la frontera. Interpreta la no homogeneidad $h = h(x,t)$.

(b) Repite el ejercicio (a) para el caso de una membrana elástica y su desplazamiento vertical u, que obedece la ecuación

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = h,$$

con $x \in \Omega \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$.

2. Método de Cauchy-Kowalevski. Suponiendo que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones analíticas, y que la solución $u = u(x,t)$ del problema de Cauchy $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, también es analítica en $x \in \mathbb{R}$, y en $t > 0$, deriva nuevamente la fórmula de d'Alembert mediante una expansión de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

e igualando término a término con las expansiones f y g. A este método se le conoce como *método de Cauchy-Kowalevski.* (*Sugerencia:* Usando la ecuación de onda expresa las derivadas con respecto a t en $(x,0)$ en términos de derivadas mixtas: $u_{tt}(x,0) = c^2 u_{xx}(x,0)$, $u_{ttt}(x,0) = c^2 u_{xxt}(x,0)$, etc. Sustituye y expresa $u(x,t)$ en términos de dos series de potencias: una para f y otra para la antiderivada de g.)

3. Sean v y u dos soluciones de la ecuación de onda homogénea,

$$\Box u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que $\Box(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$.

(b) Suponiendo que u es solución de $\Box u = 0$ en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$, con condiciones

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde f y g son funciones de clase C^1 y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\mathrm{cin}}(t) + E_{\mathrm{pot}}(t),$$

es constante en t, donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\mathrm{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx, \quad \text{y} \quad E_{\mathrm{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\, dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular dE/dt. Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que f, g y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en (b) demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe $T > 0$ tal que $E_{\mathrm{cin}}(t) = E_{\mathrm{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$.

4. Sean $f, g \in C_0^1(\mathbb{R})$, es decir, de clase C^1 y de *soporte compacto* ($f = g \equiv 0$ fuera de un intervalo acotado $|x| \leq R$, para cierto $R > 0$). Demuestra que la solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$ de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

es de soporte compacto (en la variable x, y con diferente R, por supuesto), para cada $t > 0$ fijo. Dado que la solución tiene la forma $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, prueba que las funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tienen soporte compacto sólo cuando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, dy = 0.$$

5. Estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1, \qquad x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x,0) &= 0, \qquad x \geq 0, \\ u_t(x,0) &= 0, \qquad x \geq 0, \\ (u_t + \beta u_x)(0,t) &= 0, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es constante. Suponiendo que $\beta \neq 0$, $\beta \neq c$, usa la identidad de Green-Lagrange para determinar la solución en las regiones $x > ct \geq 0$ y $0 \leq x \leq ct$. Prueba que la solución encontrada es única, usando la identidad de Green-Lagrange o mediante el método de energía. ¿Qué pasa si $\beta = 0$? ¿Qué pasa si $\beta = c$?

6. Aplica el principio de Duhamel para resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x, \\ u_t(x,0) &= 1 + x, \end{aligned}$$

donde $c > 0$ es constante. Verifica que la función encontrada es, efectivamente, solución del problema.

7. Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt, \\ u(x,0) &= e^x, \\ u_t(x,0) &= \sin x, \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, con $c > 0$ constante.

8. Resuelve el siguiente problema no homogéneo con valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= g(t)\sin x, && 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, && t \ge 0. \end{aligned}$$

Aquí $g \in C^2(\mathbb{R})$ es una función conocida y acotada uniformemente.

9. Resuelve el siguiente problema para una cuerda semi-infinita con un extremo fijo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && x > 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t &= 0, && x > 0, \\ u(0,t) &= 0, && t \ge 0, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-4), & |x-4| \le \pi/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

10. Problema de Goursat. Considera el siguiente problema con datos iniciales sobre una recta característica:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && x > t > 0, \\ u(x,0) = e^x, \quad u(x,x) &= \cos x, && x > 0. \end{aligned}$$

Encuentra la solución en la región $\mathcal{R} = \{x > t > 0\}$ y determina su dominio de dependencia para cualquier punto de $\mathcal{R}$. (*Sugerencia:* Aplica el teorema del paralelogramo característico.)

11. Modelo con fricción interna. Considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \tau u_{xx} &= \gamma u_{xxt}, && x \in [0,L], \ \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad t(x,0) &= g(x), && x \in [0,L], \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, && t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde ρ, τ y γ son constantes positivas.

(a) Define
$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho u_t^2 + \tau u_x^2\right) dx, \qquad t > 0.$$
Suponiendo que u es suficientemente suave (por ejemplo, de clase C^3), demuestra que $dE/dt \leq 0$ para todo $t > 0$. Interpreta el resultado.

(b) Usa (a) para demostrar que si existe una solución suficientemente suave al problema (1) entonces ésta es única.

(c) Usando separación de variables determina si $u(x,t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Interpreta tu resultado.

12. Resuelve la ecuación de onda homogénea
$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$
en $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ con condiciones iniciales $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x_2$. Verifica que la solución es correcta.

13. Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty))$ es solución de
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta_x u &= 0, & x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0,\\ u(x,0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^3,\\ u_t(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$
donde f, g son suaves y de soporte compacto, demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que
$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$
para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. (*Sugerencia:* Usa la fórmula de Kirchhoff.)

14. Encuentra la solución a
$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$
donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, con condiciones iniciales
$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

15. Sea u la solución de $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$, para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, con datos iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Suponiendo que f y g están soportadas en la esfera compacta de radio $\rho_0 > 0$ y centro en $x = 0$, $\bar{B}_{\rho_0}(0)$, describe el soporte de la solución u para todo $t > 0$.

16. Considera la ecuación de onda en $\mathbb{R}^3$,
$$u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0,$$
con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestra que la solución general *con simetría esférica* (es decir, $u = u(r,t)$, con $r = |x|$) tiene la forma

$$u = \frac{1}{r}\left(F(r+ct) + G(r-ct)\right).$$

(b) Prueba que si los datos iniciales son $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g(r)$, donde g es una función par de su argumento, entonces la solución es

$$u(r,t) = \frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} \rho g(\rho)\, d\rho.$$

(c) Si g está dada por

$$g(r) = \begin{cases} 1, & \text{para } \ 0 < r < a, \\ 0, & \text{para } \ r > a, \end{cases}$$

con $a > 0$, encuentra explícitamente, usando el inciso anterior, la solución u en las diferentes regiones acotadas por los conos $r = a \pm ct$ en el espacio-tiempo. Prueba que u es discontinua en $(0, a/c)$ (esto se debe al fenómeno de *focalización* de la discontinuidad de u_t en $t = 0$, $|x| = a$).

17. Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde $u = u(x,y,z,t)$ (es decir, en $\mathbb{R}^3$), con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2+y^2+z^2.$$

(a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x,y,z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),$$

donde $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$.

(b) Encuentra una solución que sólo dependa de $r = |\bar{x}|$, $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para $r > 0$, $t > 0$. Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos $r \geq t$ y $r < t$.)

(c) Discute la diferenciabilidad de la solución en la curva $t = |\bar{x}|$.

(d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u_{|t=0} = u_{t|t=0} &= 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\ u_{|t=0} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ u_{t|t=0} &= x^2+y^2+z^2, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b).

18. Considera el problema de Cauchy para la ecuación de onda en $\mathbb{R}^5$:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0, &\qquad x \in \mathbb{R}^5, t \geq 0,\\
u(x,0) = f(x), &\qquad x \in \mathbb{R}^5,\\
u_t(x,0) = g(x), &\qquad x \in \mathbb{R}^5.
\end{aligned}
$$

Definiendo las medias esféricas

$$
\begin{aligned}
U(x;r,t) &:= \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5}\int_{|\eta|=1} u(x+r\eta,t)\, dS_\eta,\\
F(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5}\int_{|\eta|=1} f(x+r\eta)\, dS_\eta,\\
G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5}\int_{|\eta|=1} g(x+r\eta)\, dS_\eta,
\end{aligned}
$$

para $r > 0$, $t > 0$, y $x \in \mathbb{R}^5$ fijo, y donde ω_5 es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^5$, sea

$$\tilde{U}(x;r,t) := r^2 U_r(x;r,t) + 3rU(x;r,t).$$

(a) Prueba que $\tilde{U}$ es solución de

$$\tilde{U}_{tt} - c^2\tilde{U}_{rr} = 0,$$

y encuentra $\tilde{U}$ explícitamente en términos de F y G.

(b) Demuestra que

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{3r}\\
&= \left(\frac{1}{3}\,t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right) G(x;ct) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{3}\,t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right) F(x;ct).
\end{aligned}
$$

19. Demuestra que, de todas las dimensiones $n \in \mathbb{N}$, sólo cuando $n = 3$ puede uno tener propagación de ondas esféricas *sin distorsión y con atenuación*. Esto significa lo siguiente: una onda esférica satisface la ecuación de onda,

$$u_{tt} - c^2\Big(u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r\Big) = 0,$$

donde r es la coordenada radial (ver sección dedicada a las medias esféricas). Considera una solución que tiene la forma

$$u(r,t) = \alpha(r)f(t - \beta(r)),$$

donde el término $\alpha = \alpha(r)$ se conoce como término de *atenuación*, y $\beta = \beta(r)$ es el término de *retraso*. La pregunta es si existen soluciones no triviales de este tipo para f arbitraria. (*Sugerencia:* Sustituye en la ecuación y encuentra una ecuación diferencial ordinaria para f; haciendo los coeficientes de f, f' y f'' iguales a cero, resuelve para encontrar que $n = 1$ o $n = 3$; en otro caso, $u \equiv 0$. Si $n = 1$ demuestra que α es constante, es decir, no hay atenuación.)

20. Ecuación de onda con disipación. Considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_{tt} + \gamma u_t - c^2 \Delta u &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es constante y $g = g(x)$ es una función conocida.

(a) Encuentra el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v(x,t) = e^{\alpha t} u(x,t)$ resuelve una ecuación sin derivadas de orden uno (pero posiblemente con derivadas de orden cero).

(b) Extiende la solución a $\mathbb{R}^3$ y encuentra $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $w(x_1, x_2, x_3, t) := w(x, x_3, t) = e^{\beta x_3} v(x,t)$ es solución de una ecuación diferencial con derivadas de orden dos, solamente, para $(x, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

(c) Encuentra la solución del problema original.

Total: 20 pts.