Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2021-1

Soluciones de Tychonov

Vamos a construir soluciones no triviales del siguiente problema de Cauchy en una dimensión espacial:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(Claramente, $u(x,t) \equiv 0$ es solución del problema (1).) Para construir la soluciones de Tychonov consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(0,t) &= h(t), & t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

con $h = h(t)$ una función por determinar. Propongamos una solución de (2) representada como una serie de potencias,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) x^n,$$

y supongamos por el momento que la serie converge uniformemente (y, por ende, podemos derivar término a término). Así,

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=0}^{+\infty} h_n'(t) x^n, \\ u_x &= \sum_{n=1}^{+\infty} n h_n(t) x^{n-1}, \\ u_{xx} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) h_n(t) x^{n-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del calor obtenemos,

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=2}^{+\infty} \big(h_{n-2}'(t) - n(n-1)h_n(t)\big) x^{n-2}.$$

Igualmente, sustituyendo en las condiciones en $x = 0$ obtenemos

$$u(0,t) = h_0(t) = h(t), \qquad u_x(0,t) = h_1(t) = 0, \qquad \forall\, t > 0.$$

De esta forma, para tener una solución de (2) requerimos resolver la siguiente jerarquía de ecuaciones recursivas para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= h(t), \\ h_1(t) &= 0, \\ h_n(t) &= \frac{1}{n(n-1)} h'_{n-2}(t), \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Es fácil demostrar por inducción la siguiente

Proposición 1. *La solución de* (3) *está dada por*

$$h_{2k}(t) = \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!}, \qquad h_{2k+1}(t) \equiv 0,$$

para todo $k \geq 0$ y todo $t > 0$. (Aquí $h^{(n)}(t)$ denota $d^n h/dt^n$, para todo $n \geq 1$.)

Demostración. Ejercicio. □

Por lo tanto el candidato a solución debe tener la siguiente forma:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \tag{4}$$

Finalmente, escogemos $h = h(t)$ de la manera siguiente:

$$h(t) := \begin{cases} e^{-1/t^\alpha}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \tag{5}$$

para cierto $\alpha > 1$. Con el fin de demostrar la convergencia uniforme de la serie (4), el siguiente lema es de utilidad.

Lema 2. *Existe $\delta = \delta(\alpha) > 0$ tal que*

$$|h^{(k)}(t)| < \frac{k!}{(\delta t)^k} \exp\Big(-\frac{1}{2t^\alpha}\Big),$$

para todo $k \geq 0$, $t > 0$.

Demostración. Sea $f(z) = \exp(-1/z^\alpha)$, función analítica en $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y sea $z_0 = t > 0$. Tomemos el círculo cerrado con radio δt y centro en t,

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - t| = \delta t\},$$

con $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que Γ no intersecta al origen.

Vamos a demostrar que es posible encontrar $\delta = \delta(\alpha) > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) > \frac{1}{2t^\alpha}, \qquad \forall\, z \in \Gamma. \tag{6}$$

Si (6) se cumple, entonces aplicando la fórmula integral de Cauchy a $f = f(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} |h^{(k)}(t)| &= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-t)^{k+1}}\,dz\right| \\ &= \frac{k!}{(\delta t)^k}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(t+\delta t e^{i\theta})}{\delta t e^{i(k+1)\theta}} i\delta t e^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\le \frac{k!}{(\delta t)^k}\sup_{z\in\Gamma}\exp(-\mathrm{Re}\,(1/z^\alpha))\underbrace{\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-t}\,dz\right|}_{=1} \\ &\underset{(6)}{<} \frac{k!}{(\delta t)^k}\exp\Big(-\frac{1}{2t^\alpha}\Big), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.
Para verificar (6) notamos que

$$z = t(1+\delta e^{i\theta}) \in \Gamma,\ \ \theta\in[0,2\pi) \quad\Rightarrow\quad t^\alpha \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(1+\delta e^{i\theta})^\alpha}\right).$$

Denotando $\zeta = 1+\delta e^{i\theta} = re^{i\omega}$ se obtiene

$$r(\delta)^2 = 1+\delta^2+2\delta\cos\theta, \quad \omega(\delta) = \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{\delta\sin\theta}{1+\delta\cos\theta}\right).$$

En vista de $\mathrm{Re}\,\zeta^{-\alpha} = r^{-\alpha}\cos(\alpha\omega)$, observamos que

$$(6) \iff r^{-\alpha}\cos(\alpha\omega) > \frac{1}{2} \iff \cos(\alpha\omega) > \tfrac{1}{2}(1+\delta^2+2\delta\cos\theta)^{\alpha/2}.$$

Sea

$$\psi(\delta) := \cos(\alpha\omega(\delta)) - \tfrac{1}{2}(1+\delta^2+2\delta\cos\theta)^{\alpha/2}.$$

En virtud de que $\omega(0)=0$, entonces para cualquier $\theta\in(0,2\pi)$ tenemos que $\psi(0)=1/2>0$. Por continuidad, $\psi(\delta)>0$ para $\delta>0$ pequeño. Concluímos que existe $\delta=\delta(\alpha)>0$ tal que la desigualdad (6) es cierta. Hemos demostrado el lema. □

Ahora bien, es fácil probar por inducción que

$$\frac{k!}{(2k)!} < \frac{1}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{h^k(t)}{(2k)!}x^{2k}\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{k!(\delta t)^k}e^{-1/2t^\alpha} = \exp\left(\frac{1}{t}\Big(\frac{|x|^2}{\delta} - \frac{1}{2t^{\alpha-1}}\Big)\right).$$

Esto implica que, por el criterio de comparación, la serie (4) converge para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ (trivialmente para $t \leq 0$ ya que $h(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $\exp(-1/(2t^\alpha)) < 1$). Mas aún, $u(x,t) \to 0$ uniformemente en compactos de x cuando $t \to 0^+$. Notamos que u está acotada por la función

$$U(x,t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{|x|^2}{\delta} - \dfrac{1}{2t^{\alpha-1}}\Big)\right), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

la cual es acotada uniformemente para todo $|x|$ acotado y todo $t > 0$. De esta manera concluímos que la serie (4) converge uniformemente para todo $|x| \leq R$ y todo $t > 0$. Por lo tanto, podemos diferenciar término a término y un argumento similar nos permite demostrar, a su vez, que las series de las derivadas convergen uniformemente para $|x|$ acotado y todo $t > 0$. Esto implica que u es de clase C^∞. En particular, calculamos

$$u_{xx} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{k+1}(t)}{(2k)!} x^{2k} = u_t.$$

En conclusión, hemos construído para cada $\alpha > 1$ una solución no trivial $u = u(x,t)$, definida por la serie (4), de la ecuación del calor en la recta y que, además, satisface

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k(0)}{(2k)!} x^{2k} = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto tenemos una familia de soluciones no triviales (parametrizada por $\alpha > 1$) al problema (1). Estas soluciones se conocen como las *soluciones de Tychonov.*