ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

ECUACIONES DE LA EIKONAL Y DE HAMILTON-JACOBI (SECCIÓN 1)

22/08/2023

RAMÓN G. PLAZA

1. Ecuación de la eikonal

La ecuación de la "eikonal"[1] es una ecuación completamente no lineal que describe de manera aproximada la propagación de frentes de onda. Esta ecuación se puede obtener mediante una expansión asintótica en serie de potencias, por ejemplo, de soluciones a las ecuaciones de Maxwell en teoría electromagnética como veremos a continuación.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en unidades MKS [4]:

$$\begin{aligned} \mu B_t + \nabla \times E &= 0, \\ \epsilon E_t - \nabla \times B &= -\sigma E, \\ \operatorname{div}(\mu B) &= 0, \\ \operatorname{div}(\epsilon E) &= \rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí $E = E(x,t)$, $B = B(x,t) \in \mathbb{R}^3$ son los campos vectoriales eléctrico y magnético, respectivamente, con $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Las funciones $\epsilon = \epsilon(x)$, $\mu = \mu(x)$ y $\sigma = \sigma(x)$ corresponden a la permisividad eléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad del medio, respectivamente. La densidad de carga eléctrica es $\rho = \rho(x,t)$. El lector familiarizado con teoría electromagnética se habrá percatado de que hemos sustituído en la ley de Ampère (segunda ecuación en (1)) la *ley de Ohm*, $J = \sigma E$, donde $J \in \mathbb{R}^3$ es la densidad de corriente eléctrica.

Vamos a buscar soluciones de (1) que sean funciones armónicas en el tiempo, de la forma

$$E(x,t) = \operatorname{Re}(\hat{E}(x)e^{-i\omega t}), \qquad B(x,t) = \operatorname{Re}(\hat{B}(x)e^{-i\omega t}),$$

donde $\hat{E}(x), \hat{B}(x) \in \mathbb{C}^3$, son campos vectoriales complejos, y $\omega \in \mathbb{R}$ es la frecuencia. Sustituyendo en (1):

$$0 = \mu B_t + \nabla \times E = \operatorname{Re}\big((\nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B})e^{-i\omega t}\big),$$

$$0 = \epsilon E_t - \nabla \times B + \sigma E = \operatorname{Re}\big((\sigma\hat{E} - \nabla \times \hat{B} - i\omega\epsilon\hat{E})e^{-i\omega t}\big).$$

Por lo tanto, una condición suficiente para tener una solución es que los vectores complejos $\hat{E}$ y $\hat{B}$ sean soluciones de las siguientes ecuaciones *reducidas* (independientes del tiempo):

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B} &= 0, \\ \nabla \times \hat{B} + i\omega\epsilon\hat{E} &= \sigma\hat{E}. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] del griego, $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$, imagen.

De la primera ecuación se deduce inmediatamente la ley de Gauss magnética, es decir, $\operatorname{div}(\mu B) = 0$. Resolviendo (2) se obtiene $\hat{E}$, que a su vez determina la densidad de carga eléctrica a través de $\rho = \operatorname{div}(\epsilon E)$.

Para resolver las ecuaciones reducidas (2) proponemos una expansión en serie de potencias en términos del número de onda. Este método, aunque no es riguroso, resulta muy útil para estudiar el comportamiento aproximado de las soluciones y se conoce como *expansión de óptica geométrica* [5].

En el vacío, $\epsilon(x)$ y $\mu(x)$ toman valores constantes, $\epsilon_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$, respectivamente. La constante $c_0 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Definimos el número de onda como $k = \omega/c_0$ y proponemos expansiones asintóticas para $\hat{E}$ y $\hat{B}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{E}(x) &\approx e^{iku(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} (ik)^{-m} \hat{E}_m(x), \\ \hat{B}(x) &\approx e^{iku(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} (ik)^{-m} \hat{B}_m(x), \end{aligned} \tag{3}$$

donde $u = u(x) \in \mathbb{R}$ es la *fase de la onda*. El símbolo "$\approx$" indica que la solución es aproximada y que no estamos considerando el problema de convergencia de la serie. Los coeficientes son vectores reales ($\hat{E}_m(x)$, $\hat{B}_m(x) \in \mathbb{R}^3$, para cada $m = 0, 1, \ldots$).

Vamos a sustituir las expansiones (3) en las ecuaciones reducidas y a igualar coeficientes de las mismas potencias de ik. Calculando:

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{E} &= e^{iku(x)}\Big((ik)\nabla u \times \hat{E}_0 + (\nabla \times \hat{E}_0 + \nabla u \times \hat{E}_1) + O((ik)^{-1})\Big) \\ &\underset{(2)}{=} i\omega\mu\hat{B} \\ &= i\omega\mu e^{iku(x)}\Big(\hat{B}_0 + \frac{1}{ik}\hat{B}_1 + O((ik)^{-2})\Big) \\ &\underset{k=\omega/c_0}{=} c_0\mu e^{iku(x)}\Big((ik)\hat{B}_0 + \hat{B}_1 + O((ik)^{-1})\Big). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de orden $O(ik)$ obtenemos

$$\nabla u \times \hat{E}_0 = c_0\mu\hat{B}_0. \tag{4}$$

Análogamente, calculando el rotacional de la expansión de $\hat{B}$, sustituyendo en la segunda ecuación del sistema reducido (2), e igualando coeficientes de orden $O(ik)$, se llega a la ecuación

$$\nabla u \times \hat{B}_0 = -c_0\epsilon\hat{E}_0. \tag{5}$$

De estas ecuaciones notamos inmediatamente que

$$\nabla u \cdot \hat{B}_0 = \nabla u \cdot \big(\frac{1}{c_0\mu}\nabla u \times \hat{E}_0\big) = 0, \qquad \nabla u \cdot \hat{E}_0 = -\nabla u \cdot \big(\frac{1}{c_0\epsilon}\nabla u \times \hat{B}_0\big) = 0.$$

Por lo tanto, ∇u es simultáneamente ortogonal a $\hat{E}_0$ y a $\hat{B}_0$. Eliminando $\hat{B}_0$ de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$-c_0\epsilon\hat{E}_0 = \nabla u \times \Big(\frac{1}{c_0\mu}\nabla u \times \hat{E}_0\Big) = \frac{1}{c_0\mu}\Big(\big(\underbrace{\nabla u \cdot \hat{E}_0}_{=0}\big) - |\nabla u|^2\hat{E}_0\Big) = -\frac{1}{c_0\mu}|\nabla u|^2\hat{E}_0,$$

es decir,

$$\big(|\nabla u|^2 - c_0^2\epsilon\mu\big)\hat{E}_0 = 0.$$

Si el campo $\hat{E}_0 = \hat{E}_0(x)$ no es idénticamente cero entonces esta ecuación se satisface siempre que la fase de la onda sea solución de la *ecuación de la eikonal*:

$$|\nabla u|^2 = n(x)^2, \tag{6}$$

donde $n(x)$ es el índice de refracción del medio: $n(x)^2 = c_0^2 \epsilon(x)\mu(x) = c_0^2/\tilde{c}(x)^2$, con $\tilde{c}(x)^2 = 1/(\epsilon(x)\mu(x))$. La velocidad relativa de la luz en el medio (velocidad de fase) es

$$c(x) = \frac{\tilde{c}(x)}{c_0},$$

por lo que la ecuación de la eikonal se puede escribir de la forma

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{c(x)^2}. \tag{7}$$

Las superficies de nivel con fase constante (es decir, $u(x) =$ constante) se denominan *frentes de onda*. Las curvas ortogonales a ellos son las curvas características de la ecuación no lineal de primer orden (7) y se denominan *rayos* en la terminología de óptica geométrica. Las ecuaciones características son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. La fase y las amplitudes de los campos eléctrico y magnético satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias sobre los rayos. El término dominante en la expansión de los campos se denomina término de óptica geométrica, ya que sólo involucra cantidades que también ocurren en la teoría clásica de óptica (como el índice de refracción, o la velocidad en el medio, entre otras). Una trayectoria ortogonal al frente de onda coincide con un rayo, que se asocia a un rayo de luz, en virtud de que ∇u es ortogonal a los campos eléctrico y magnético a primer orden ($\hat{E}_0$ y $\hat{B}_0$, respectivamente).

Por ejemplo, consideremos el frente de onda $u(x) = t$, con $t > 0$. Una trayectoria $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ sobre un rayo, satisface

$$u(\hat{x}(t)) = t.$$

Derivando obtenemos

$$\nabla u \cdot \hat{x}'(t) = 1.$$

Como el vector tangente al rayo, a saber $\hat{x}'(t)$, es paralelo a ∇u, esta ecuación y la ecuación de la eikonal implican que

$$1 = |\nabla u \cdot \hat{x}'(t)| = |\nabla u||\hat{x}'(t)| = \frac{1}{|c(\hat{x}(t))|}|\hat{x}'(t)|,$$

por lo que la velocidad del rayo es $|\hat{x}'(t)| = |c(\hat{x}(t))|$.

2. La ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación completamente no lineal de primer orden

$$u_t + H(t, x, \nabla u) = 0, \tag{8}$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, se conoce en la literatura como la *ecuación de Hamilton-Jacobi*. La función $H = H(t, x, p)$, con $x, p \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, es el *hamiltoniano* de la ecuación. Ecuaciones de la forma (8) constituyen un ejemplo importante de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, ya que aparecen frecuentemente en mecánica clásica y mecánica relativista. Esta ecuación permite una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana (principio de mínima acción) y la mecánica hamiltoniana (ecuaciones de Hamilton), y presenta algunas ventajas sobre éstas últimas si se conoce una integral de movimiento. Coo referencia pueden consultar el libro de Evans [1], así como cualquier texto de mecánica clásica [2, 3, 7, 6].

Antes de derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi a partir de primeros principios, aplicaremos el método de características para resolver la ecuación con datos sobre una curva inicial. Por simplicidad, consideremos la ecuación (8) en una dimensión espacial,

$$u_t + H(t, x, u_x) = 0, \tag{9}$$

con $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y dato inicial de la forma

$$u(x, 0) = f(x), \tag{10}$$

donde f es una función conocida. La curva inicial es, por lo tanto,

$$\mathcal{I}' = \{(0, \xi, f(\xi)) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Supondremos también que el hamiltoniano $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en su dominio. La ecuación (9) se puede escribir en la forma general

$$F(t, x, u, p, q) := q + H(t, x, p).$$

Observación 2.1. *Aquí estamos asociando las variables p con u_x y q con u_t, lo cual contrasta con la notación usual en mecánica hamiltoniana para las coordenadas canónicas, en la cual p denota el momento generalizado y q denota a las coordenadas generalizadas para la posición. Hemos resuelto no utilizar la notación usual por compatibilidad con la notación usada en la clase.*

De este modo, las derivadas de F son, a saber, $F_x = H_x$, $F_t = H_t$, $F_u = 0$, $F_p = H_p$ y $F_q = 1$. Resolver el problema de Cauchy es equivalente a resolver el siguiente sistema característico:

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\eta} &= 1, & t(0) &= 0,\\
\frac{dx}{d\eta} &= H_p(t, x, p), & x(0) &= \xi,\\
\frac{dp}{d\eta} &= -H_x(t, x, p), & p(0) &= p_0,\\
\frac{dq}{d\eta} &= -H_t(t, x, p), & q(0) &= q_0,\\
\frac{du}{d\eta} &= pH_p(t, x, p) + q, & u(0) &= f(\xi),
\end{aligned} \tag{11}$$

donde $(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$ son soluciones al sistema nolineal

$$\begin{aligned}
q + H(0, \xi, p) &= 0,\\
p - f'(\xi) &= 0.
\end{aligned}$$

La única solución a este sistema es $p_0 = f'(\xi)$ y $q_0 = -H(0, \xi, f'(\xi))$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo. Resolviendo la ecuación para t notamos que $t = \eta$, por lo que denotaremos las derivadas temporales mediante $\dot{} = d/dt = d/d\eta$. Por el teorema **??** podemos esperar que, bajo ciertas condiciones sobre el hamiltoniano y los datos iniciales, exista una solución a este sistema. La observación que queremos hacer en este caso es que el sistema resultante se desacopla: por un lado tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= H_p(t, x, p), & x(0) &= \xi,\\
\dot{p} &= -H_x(t, x, p), & p(0) &= f'(\xi),
\end{aligned} \tag{12}$$

conocido como las *ecuaciones de Hamilton* para la posición y el momento (o simplemente, *sistema hamiltoniano*). Por el otro tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pH_p(t,x,p) + q, \qquad && u(0) = f(\xi), \\ \dot{q} &= -H_t(t,x,p), && q(0) = -H(0,\xi,f'(\xi)). \end{aligned} \tag{13}$$

Nótese que el sistema de Hamilton es independiente del resto de la ecuaciones: podemos resolver primero (12) y sustituir el resultado en el sistema (13). Cabe señalar que, de hecho, en la mayoría de las aplicaciones en mecánica lo que se busca es la solución para x y p (posición y momento), y no la solución para u y q. Típicamente la función u (también llamada función principal de Hamilton o función geodésica) se utiliza para encontrar las variables x y p explícitamente como funciones del tiempo, y en casos en los que es posible integrar la ecuación directamente. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, en cuyo caso claramente q es constante y la ecuación para u se integra directamente. El método de Hamilton-Jacobi consiste en encontrar dicha integral para despejar x y p a partir del valor de u. Cabe destacar que esta independencia del hamiltoniano con respecto del tiempo ocurre en muchos ejemplos de interés, como veremos más adelante.

2.1. Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Sea $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave que denominaremos el *lagrangiano*. Introducimos la siguiente notación:

$$L = L(t,y,z), \qquad t\in\mathbb{R},\;\; y,z\in\mathbb{R}^n,$$

$$D_yL = (L_{y_1},\dots,L_{y_n})^\top \in \mathbb{R}^n, \quad D_zL = (L_{z_1},\dots,L_{z_n})^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Consideremos dos puntos en el espacio, $a, x \in \mathbb{R}^n$, $a \neq x$. Sea $y = y(s) \in \mathbb{R}^n$ una trayectoria parametrizada por $s \in [0,t]$ tal que $y(0) = a$, $y(t) = x$. Supondremos también que dicha trayectoria es suave (por lo menos de clase C^2). De esta manera definimos la *acción* como el siguiente funcional:

$$I[y] := \int_0^t L(s,y(s),y'(s))\,ds, \qquad I : \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

donde la trayectoria $y = y(s)$ pertenece a la clase de trayectorias admisibles $\mathcal{A}$, definida como

$$\mathcal{A} := \{y \in C^2([0,t];\mathbb{R}) \,:\, y(0) = a,\, y(t) = x\}.$$

Por lo tanto, podemos plantear el siguiente problema variacional: ¿cuál es el mínimo valor de $I[y]$ para $y \in \mathcal{A}$? ¿Existe una trayectoria "minimizante", $\bar{y} \in \mathcal{A}$, tal que

$$I[\bar{y}] = \min_{y\in\mathcal{A}} I[y]?$$

Una condición necesaria para una trayectoria minimizante es que sea solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como lo indica el siguiente

Teorema 2.2. *Si existe una trayectoria minimizante $\bar{y} \in \mathcal{A}$ entonces ésta satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:*

$$-\frac{d}{ds}\big((D_zL)(s,\bar{y}(s),\bar{y}'(s))\big) + (D_yL)(s,\bar{y}(s),\bar{y}'(s))) = 0, \qquad 0 \le s \le t. \tag{14}$$

Demostración. Sea $\varphi \in C^\infty([0,t];\mathbb{R}^n)$ una función de prueba tal que $\varphi(0) = \varphi(t) = 0$. De este modo definimos para cada $h \in \mathbb{R}$,

$$y(s) = \bar{y}(s) + h\varphi(s), \quad s \in [0,t],$$

donde $\bar{y} \in \mathcal{A}$ es una trayectoria minimizante. Por lo tanto, $y \in \mathcal{A}$ y, por ser mínimo, $I[y] \geq I[\bar{y}]$. La función de variable real

$$g(h) = I[\bar{y} + h\varphi] = \int_0^t L(s, \bar{y}(s) + h\varphi(s), \bar{y}'(s) + h\varphi'(s))\, ds$$

tiene un mínimo en $h = 0$ y además es continuamente diferenciable en h. En consecuencia,

$$\frac{dg}{dh}(0) = 0.$$

Calculemos la derivada. Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dh} &= \int_0^t \sum_{j=1}^n \Big(L_{y_j}(s, \bar{y} + h\varphi, \bar{y}' + h\varphi')\varphi_j(s) + L_{z_j}(s, \bar{y} + h\varphi, \bar{y}' + h\varphi')\varphi_j'(s) \Big)\, ds \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^t \Big(L_{y_j}(s, \bar{y} + h\varphi, \bar{y}' + h\varphi') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s, \bar{y} + h\varphi, \bar{y}' + h\varphi')\big) \Big)\varphi_j(s)\, ds + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \underbrace{\big(L_{z_j}((s, \bar{y} + h\varphi, \bar{y}' + h\varphi'))\varphi_j(s)\big)\big|_{s=0}^{s=t}}_{=0}.
\end{aligned}$$

Evaluando en $h = 0$ obtenemos,

$$0 = \sum_{j=1}^n \int_0^t \Big(L_{y_j}(s, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s, \bar{y}, \bar{y}')\big) \Big)\varphi_j(s)\, ds$$

En virtud de que la relación anterior se cumple para toda función de prueba $\varphi \in C^\infty([0,t];\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(0) = \varphi(t) = 0$, concluímos que, para todo índice $1 \leq j \leq n$,

$$L_{y_j}(s, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s, \bar{y}, \bar{y}')\big) = 0,$$

es decir, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (14). $\square$

Ejemplo 2.3. *Consideremos una partícula de masa $m > 0$, constante, sujeta a un potencial $V = V(y)$ que depende de la posición de dicha particula $y \in \mathbb{R}^3$, de manera que la fuerza ejercida sobre la misma es el gradiente del potencial, $F = D_y V$. Como la variable z está asociada a la derivada de y con respecto del tiempo (velocidad), la energía cinética de la partícula es $\frac{1}{2}m|z|^2$. De esta forma consideremos el siguiente lagrangiano:*

$$L(y,z) = \tfrac{1}{2}m|z|^2 - V(y), \qquad z, y \in \mathbb{R}^3.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una trayectoria $\bar{y}$ que minimiza la acción $I[y]$ son

$$-\frac{d}{ds}L_{z_j} + L_{y_j} = -\frac{d}{ds}\left(m\bar{y}_j'(s)\right) - V_{y_j}(\bar{y}(s)) = 0,$$

para $1 \leq j \leq 3$. Escritas en forma vectorial, reconocemos que éstas corresponden a la segunda ley de Newton:

$$m\bar{y}''(s) = F(\bar{y}(s)).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange constituyen una condición necesaria (mas no suficiente) para la existencia de una trayectoria minimizante. Si una trayectoria en la clase $\mathcal{A}$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces se denomina *trayectoria crítica o punto crítico*. Si $\bar{y} = \bar{y}(s)$ es una trayectoria crítica entonces definimos el *momento generalizado* $p = p(s)$, correspondiente a la posición $\bar{y}(s)$ con velocidad $\bar{y}'(s)$, mediante

$$p(s) = D_z L(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)), \quad s \in [0,t]. \tag{15}$$

Hipótesis 2.4 (existencia de la transformada de Legendre)**.** *Para todo* $y, p \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, *la ecuación*

$$p = D_z L(s, y, q),$$

se puede resolver de manera única para $q \in \mathbb{R}^n$ *mediante una función* $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *suficientemente diferenciable, de modo que,*

$$q = Q(s, y, p).$$

A ésta se le llama transformada de Legendre*.*

Definición 2.5. *Sea* $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un lagrangiano que satisface la hipótesis 2.4. Entonces para cada* $s \in \mathbb{R}$ *y* $y, p \in \mathbb{R}^n$ *definimos el hamiltoniano asociado mediante*

$$\begin{aligned} &H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ &H(s,y,p) := p \cdot Q(s,y,p) - L(s,y,Q(s,y,p)), \qquad (s,y,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{16}$$

Lema 2.6 (ecuaciones de Hamilton)**.** *Bajo la hipótesis 2.4, sea* $\bar{y} = \bar{y}(s)$, $s \in [0,t]$, *una trayectoria crítica. Entonces* $\bar{y}(s)$ *y el momento generalizado asociado* $p = p(s)$ *satisfacen el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \bar{y}'(s) &= D_p H(s, \bar{y}(s), p(s)), \\ p'(s) &= -D_y H(s, \bar{y}(s), p(s)), \end{aligned} \tag{17}$$

para $s \in [0,t]$, *conocido como el sistema de ecuaciones de Hamilton. Mas aún, el mapeo* $s \mapsto H(\bar{y}(s), p(s))$ *es constante si* H *no depende explícitamente de* s*.*

Demostración. Por la hipótesis 2.4, que garantiza la existencia de la transformada de Legendre, podemos definir, para cada $s \in [0,t]$,

$$\bar{y}'(s) = Q(s, \bar{y}(s), p(s)), \tag{18}$$

para cierta función suave Q y donde p está definido en (15). Introducimos la siguiente notación:

$$Q(\cdot) = (q_1(\cdot), \ldots, q_n(\cdot))^\top,$$

donde cada q_j es una función escalar. Así, para cada $1 \le i \le n$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = \sum_{j=1}^n p_j(s) \frac{\partial q_j}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) - \frac{\partial L}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))) + \\ - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial z_j}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))) \frac{\partial q_j}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)). \end{aligned}$$

Pero el momento generalizado es, por definición, $p = D_z L$, por lo que la fórmula anterior se simplifica (se cancelan las sumas) y obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = -\frac{\partial L}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))). \tag{19}$$

Usando el mismo argumento se puede verificar que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = q_i(s, \bar{y}(s), p(s)).$$

Así, por la ecuación (18) concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = \bar{y}_i'(s),$$

para todo $1 \leq i \leq n$, que implica la primera ecuación en (17).

Por otra parte, sustituyendo (18) en (19) y usando el hecho que $\bar{y} = \bar{y}(s)$ es una trayectoria crítica y que, por ende, es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (14), obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = -\frac{\partial L}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial z_i}(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s))\right) = -p_i'(s),$$

para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual implica la segunda de las ecuaciones en el sistema de Hamilton (17).

Finalmente, si suponemos que el hamiltoniano no depende explícitamente de s, usando el sistema (17) obtenemos

$$\frac{d}{ds} H(\bar{y}(s), p(s)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} p_j'(s) + \frac{\partial H}{\partial y_j} \bar{y}_j'(s) = -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial y_j} - \frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0,$$

para todo $0 \leq s \leq t$. Es decir, el hamiltoniano es constante. $\square$

Con el fin de concluir el argumento y obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi, vamos a suponer que $\bar{y} = \bar{y}(s)$ es una trayectoria crítica tal que $\bar{y}(0) = a$, $\bar{y}(t) = x$, y que, además, es de clase C^1 en los datos, es decir, que $\bar{y}$ y $\bar{y}'$ tienen derivadas continuas con respecto a $t > 0$, y a $x \in \mathbb{R}^n$. Extendemos la notación y escribimos

$$\bar{y}(s) = Y(s, t, x), \qquad \bar{y}'(s) = \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t, x).$$

Definimos la *función geodésica*, $u = u(x, t)$, como la acción

$$u(x, t) := I[\bar{y}] = \int_0^t L\Big(s, Y(s, t, x), \frac{\partial Y}{\partial s}(s, t, x)\Big)\, ds. \tag{20}$$

A la curva $Y(s, t, x)$ se le llama curva geodésica entre $(a, 0)$ y (x, t). En virtud de que suponemos que la trayectoria crítica es de clase C^1 en los datos, u es continuamente diferenciable en (x, t). Así, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \left(L_{y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x_i \partial s} \right) ds \\
&= \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \left(\Big(\frac{d}{ds} L_{z_j}\Big) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x_i \partial s} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{d}{ds} \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) \Bigg|_{s=0}^{s=t},
\end{aligned}$$

tras haber aplicado las ecuaciones de Euler-Lagrange. Pero $Y_j(0,t,x) = a$ es independiente de x, y $Y_j(t,t,x) = x_j$ para todo t y todo j. Por lo tanto,

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(0,t,x) = 0, \qquad \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(t,t,x) = \delta_i^j,$$

para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$. En consecuencia, por la definición de momento generalizado, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = L_{z_i}(t,x,\bar{y}'(t)) = p_i. \tag{21}$$

De la misma manera, usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para calcular la derivada temporal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(L_{y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t \partial s} \right) ds \\
&= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{d}{ds} \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) ds \\
&= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \sum_{j=1}^n \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \Bigg|_{s=0}^{s=t} .
\end{aligned}$$

Sin embargo, derivando $Y_j(0,t,x) = a$ notamos que

$$\frac{\partial Y_j}{\partial t}(0,t,x) = 0.$$

Igualmente, $Y_j(t,t,x) = x_j$ para todo j implica que

$$\left(\frac{\partial Y_j}{\partial s} + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)(t,t,x) = \frac{d}{dt}\big(Y_j(t,t,x)\big) = 0.$$

Sustituyendo se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= L(t,x,\bar{y}'(t)) - \sum_{j=1}^n \left(L_{z_j}(t,x,\bar{y}'(t)) \frac{\partial Y_j}{\partial s}(t,t,x) \right) \\
&= L(t,x,\bar{y}'(t)) - \sum_{j=1}^n p_j \bar{y}_j'(t).
\end{aligned}$$

Bajo la hipótesis 2.4, $p = D_z L(t,x,q)$ es invertible con $q = Q(t,x,p)$, para cualesquiera $(t,x,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y dado que el hamiltoniano está definido mediante $H(t,x,p) = p \cdot Q(t,x,p) - L(t,x,Q(t,x,p))$, por la ecuación (21) obtenemos finalmente la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t,x,D_x u) = 0. \tag{22}$$

Referencias

[1] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[2] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Series in Physics, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, second ed., 1980.

[3] V. Ilisie, *Lectures in classical mechanics—with solved problems and exercises*, Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer, Cham, 2020.

[4] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, second ed., 1975.

[5] J. B. Keller and R. M. Lewis, *Asymptotic methods for partial differential equations: The reduced wave equation and Maxwell's equations*, in Surveys in Applied Mathematics, J. B. Keller, D. W. McLaughlin, and G. C. Papanicolaou, eds., vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1995, pp. 1–82.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics. Vol. 1*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, third ed., 1976. Mechanics, Translated from the Russian by J. B. Skyes and J. S. Bell.

[7] K. R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley Series in Physics, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1960. 2nd ed.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`