Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2024-1

Tarea 1: Ecuaciones de primer orden

1. Encuentra una fórmula explícita para la solución al problema de Cauchy de la siguiente ecuación de transporte con *decaimiento y forzamiento*,

$$\begin{aligned} u_t + \boldsymbol{a}\cdot\nabla u + cu &= g(t), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad x\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ es un vector constante, $c>0$ es constante, y $\nabla u=(u_{x_1},\dots,u_{x_n})\in\mathbb{R}^n$. Aquí $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ son una funciones conocidas de clase C^1. Comprueba que tu respuesta es, en efecto, solución del problema.

2. Encuentra la solución de la ecuación lineal

$$u_x + xu_y = y,$$

que satisface la condición inicial $u(0,y)=y^2$ para toda $y\in\mathbb{R}$. ¿Es única?

3. Considera la ecuación lineal de primer orden

$$yu_x + xu_y = 0,$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x),\\ u(0,y) &= g(y). \end{aligned}$$

f y g son funciones conocidas de clase C^1 que satisfacen $f(0)=g(0)$. Determina las curvas características y prueba que cualquier solución es constante a lo largo de las mismas. Usa este hecho para dar una fórmula explícita para la solución general en las regiones (i) $x=\pm y$, (ii) $y^2-x^2>0$, y (iii) $x^2-y^2>0$. Verifica que la solución satisface, en efecto, la ecuación y las condiciones iniciales y que es continua en todo el plano.

4. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$, constante, y $f=f(\xi)$ una función de clase C^1 excepto en $\xi=0$. Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \alpha u,\\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

(a) Verifica que la línea recta $\{y=0\}$ es característica en todo punto.

(b) Encuentra todas las funciones f que satisfagan la condición de colinealidad de los vectores (a,b,c) y $(\tilde{x}',\tilde{y}',f')(\xi)$ vista en clase sobre la curva $\{(\xi,0)\}$ (considera tres casos, $\alpha>0$, $\alpha=0$ y $\alpha<0$).

(c) En el caso en que $\alpha > 0$, encuentra al menos dos soluciones al problema de Cauchy. (Esto se puede hacer fácilmente por inspección, por ejemplo, en el caso $\alpha = 2$.)

5. Verifica que la familia de funciones, $u(x, y) = \alpha x + (1-\alpha)y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, parametrizada por $\alpha \in \mathbb{R}$, es una familia de soluciones globales de clase C^1 del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u, \\ u(x, x) &= x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¿Existe alguna otra solución global de clase C^1 que no pertenezca a la familia? *Sugerencia:* Suponiendo que existe otra solución $w = w(x, y)$ de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ que no pertenece a la familia, sea $v := w - u$, donde u es cualquier elemento de la familia. Claramente una solución a este problema es $v = 0$. ¿Hay alguna otra?

6. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= -u, \\ u(\cos\xi, \sin\xi) &= 1, \qquad 0 \le \xi \le \pi. \end{aligned}$$

¿La solución es global?

7. Considera el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= 0, \\ u(e^{\xi}, e^{\xi}) &= \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1, 1, 0)$.

8. Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1, \\ u(\xi - \xi^2, \xi) &= \xi, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase C^1 en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? Explica tu respuesta.

9. Resuelve siguiente problema de Cauchy cerca del origen:

$$\begin{aligned} u_y - 4u_x^2 &= 0, \\ u(x, 0) &= x^2. \end{aligned}$$

10. Encuentra al menos dos soluciones del siguiente problema,

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y + \tfrac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big) &= u, \\ u(x, 0) &= \tfrac{1}{2}\big(1 - x^2\big). \end{aligned}$$

11. Sea una partícula clásica de masa $m > 0$ en una dimensión, sujeta a un potencial lineal de la forma $V = V(x) = kx$, con $k > 0$ constante. El lagrangiano se define mediante

$$L(y, z) = \tfrac{1}{2}mz^2 - ky, \qquad y, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Encuentra el momento generalizado $q = Q(y, p)$ y el hamiltoniano asociado $H = H(y, p)$.

(b) Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función geodésica es

$$u_t + \frac{1}{2m}u_x^2 + kx = 0.$$

(c) Resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi con condición inicial de la forma $u(x, 0) = f(x)$ en términos de la posición x y del momento p/m.

12. Resuelve la ecuación de Burgers

$$u_t + \big(\tfrac{1}{2}u^2\big)_x = 0, \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Prueba que la solución clásica existe hasta un tiempo finito de rompimiento $T_* > 0$. Calcula $T_* > 0$. Analizando las características, escribe una solución explícita a partir del tiempo $T_* > 0$ en forma de una onda discontinua. Prueba que dicha solución satisface la condición de entropía de Lax.

13. Encuentra una solución entrópica de clase C^1 por pedazos a la ecuación de Burgers (1) con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Discute la unicidad de la solución en dicha clase de soluciones.

14. Considera el modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards (LWR),

$$\rho_t + \big(\rho(1 - \rho)\big)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

con condición inicial

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil al problema de Cauchy. ¿Es la solución encontrada continua? Si acaso tiene discontinuidades, ¿éstas satisfacen la condición de entropía de Lax? Interpreta la solución en términos del flujo de tráfico. ¿Qué significado tiene la condición inicial?

15. Considera el modelo de tráfico LWR (ecuación (2)) sujeto a la condición inicial

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil y entrópica para todo tiempo $t > 0$. Escribe la solución explícitamente. ¿Porqué es entrópica? *Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las discontinuidades de $\rho(0,x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ dan lugar a una onda de choque y a una onda de rarefacción, respectivamente. Interpreta tu respuesta en términos de flujo de tráfico. Compara con la solución de la ecuación de Burgers (1) con los mismos datos iniciales vista en clase.

Total: 150 pts.