

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2024-1

Tarea 2: Ecuación de onda

1. Sean $f, g \in C_0^1(\mathbb{R})$, es decir, de clase C^1 y de *soporte compacto* ($f = g \equiv 0$ fuera de un intervalo acotado $|x| \leq R$, para cierto $R > 0$). Demuestra que cualquier solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ de

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

es de soporte compacto (en la variable x , y con diferente R , por supuesto), para cada $t > 0$ fijo. Dado que la solución tiene la forma $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$, prueba que las funciones $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienen soporte compacto sólo cuando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = 0.$$

2. Sean $v = v(x, t)$ y $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, dos soluciones de la ecuación de onda homogénea en una dimensión espacial,

$$\square u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que $\square(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$.

(b) Suponiendo que u es solución de $\square u = 0$ en $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, con condiciones

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donde f y g son funciones de clase C^1 y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en \mathbb{R}), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t),$$

es constante en t , donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x, t) dx, \quad \text{y} \quad E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x, t) dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular dE/dt . Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que f, g y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en el inciso (b), demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe $T > 0$ tal que $E_{\text{cin}}(t) = E_{\text{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$.

3. Estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ (u_t + \beta u_x)(0, t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es constante. Suponiendo que $\beta \neq 0$, $\beta \neq c$, usa la identidad de Green-Lagrange para determinar la solución en las regiones $x > ct \geq 0$ y $0 \leq x \leq ct$. Prueba que la solución encontrada es única, usando la identidad de Green-Lagrange o mediante el método de energía. ¿Qué pasa si $\beta = 0$? ¿Qué pasa si $\beta = c$?

4. Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \sin x, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con $c > 0$ constante. Verifica que la función encontrada es, efectivamente, solución del problema.

5. Resuelve el siguiente problema con valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x, t), & x \in (0, L), t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) &= 0, & x \in [0, L], \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es constante y la función $h = h(x, t)$ está dada por

$$h(x, t) = e^{-t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Sugerencia: Por separación de variables, considera una solución de la forma $u(x, t) = v(t) \cos(\pi x/L)$.

6. Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, & x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde f, g son suaves y de soporte compacto, demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$. (*Sugerencia:* Usa la fórmula de Kirchhoff.)

7. Considera la ecuación de onda en \mathbb{R}^3 ,

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0,$$

con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Demuestra que la solución general *con simetría esférica* (es decir, $u = u(r, t)$, con $r = |x|$) tiene la forma

$$u = \frac{1}{r} (F(r + ct) + G(r - ct)).$$

- (b) Prueba que si los datos iniciales son $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = g(r)$, donde g es una función par de su argumento, entonces la solución es

$$u(r, t) = \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \rho g(\rho) d\rho.$$

- (c) Si g está dada por

$$g(r) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 < r < a, \\ 0, & \text{para } r > a, \end{cases}$$

con $a > 0$, encuentra explícitamente, usando el inciso anterior, la solución u en las diferentes regiones acotadas por los conos $r = a \pm ct$ en el espacio-tiempo. Prueba que u es discontinua en $(0, a/c)$ (esto se debe al fenómeno de *focalización* de la discontinuidad de u_t en $t = 0$, $|x| = a$).

8. Sea u la solución de $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$, para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, con datos iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$. Suponiendo que f y g están soportadas en la esfera compacta de radio $\rho_0 > 0$ y centro en $x = 0$, $\bar{B}_{\rho_0}(0)$, describe el soporte de la solución u para todo $t > 0$.

9. Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde $u = u(x, y, z, t)$ (es decir, en \mathbb{R}^3), con condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2.$$

- (a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta),$$

donde $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$.

- (b) Encuentra una solución que sólo dependa de $r = |\bar{x}|$, $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para $r > 0$, $t > 0$. Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos $r \geq t$ y $r < t$.)

- (c) Discute la diferenciabilidad de la solución en la curva $t = |\bar{x}|$.
- (d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\ u|_{t=0} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_t|_{t=0} &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b).

10. Considera el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} + \gamma u_t - c^2 \Delta u &= 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es constante y $g = g(x)$ es una función conocida.

- (a) Encuentra el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v(x, t) = e^{\alpha t} u(x, t)$ resuelve una ecuación sin derivadas de orden uno (pero posiblemente con derivadas de orden cero).
- (b) Extiende la solución a \mathbb{R}^3 y encuentra $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $w(x_1, x_2, x_3, t) := w(x, x_3, t) = e^{\beta x_3} v(x, t)$ es solución de una ecuación diferencial con derivadas de orden dos, solamente, para $(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, t > 0$.
- (c) Encuentra la solución del problema original.

Total: 100 pts.