Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2024-1

Tarea 3: Ecuaciones de Laplace y de Poisson

1. Demuestra que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante bajo rotaciones, es decir, si $O \in \mathbb{R}^n$ es una matriz de rotación (tal que $O^\top O = I$) y si definimos $w(x) := u(Ox)$, entonces $\Delta w = 0$ si y sólo si $\Delta u = 0$.

2. Sea u armónica en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \leq M < \infty.$$

Demuestra que $u = 0$. (*Sugerencia:* Utiliza la segunda propiedad del promedio en una bola $B_R(x)$. Aplica la desigualdad de Schwarz y toma el límite cuando $R \to \infty$.)

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, con $n \geq 2$. Sean $u \in C^2(\Omega)$ y $x \in \Omega$. Demuestra que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta) \, dS_\eta \, - \, u(x) \right).$$

Nótese que esta fórmula implica la propiedad del promedio en caso de que la función sea armónica. (*Sugerencia:* Considera la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de x.)

5. Sea la bola unitaria $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\overline{B_1(0)})$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } B_1(0), \\ \quad u = g, & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases}$$

6. Encuentra la solución al problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & &\text{en } D, \\ u &= 1 + 3\sin\theta, & &\text{sobre } \partial D, \end{aligned}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, r^2 = x^2 + y^2 < a^2\}$, con $a > 0$ constante, $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. (*Sugerencia:* Aplica la fórmula de Poisson para la bola.)

7. Cálculo de la integral para el núcleo de Poisson para un semi-plano.

(a) Demuestra que

$$I = \int_0^\infty \frac{\rho^{n-3}}{(\rho^2 + k^2)^{n/2}} \, d\rho \, = \, \frac{1}{k^2(n-2)},$$

para todo $n > 3$ y todo $k \neq 0$. (*Sugerencia:* Usa sustitución trigonométrica e integra por partes.)

(b) Sea el núcleo de Poisson para el semi-plano $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_n > 0\}$, $n \geq 2$,

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n},$$

para $x \neq y$. Prueba, mediante un cálculo directo, que

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y) \, dS_y \; = \; 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$. (*Sugerencia:* Primero pruébalo para $n = 2$ y $n = 3$; recuerda que $\omega_2 = 2\pi$ y $\omega_3 = 4\pi$. Para el caso general $n > 3$ escribe la integral en todo $\mathbb{R}^{n-1}$ como una integral triple: la integral en una de las variables, la integral de superficie en *cáscaras esféricas en* $\mathbb{R}^{n-2}$, y la integral en el radio de las cáscaras; usa la integral calculada en el inciso (a) y aplica la conocida relación de recursión $\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}/(n-2)$ para $n \geq 3$; no es necesario demostrar esta última.)

8. Sean

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\},$$
$$B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1, \, y > 0\}.$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x,0) = 0$. Demuestra que la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. A esto se le conoce como el *principio de reflexión de Schwarz.* (*Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Define $V(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$. Prueba que $V \equiv 0$.)

9. Sea u una solución de clase C^2 del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R(0)}, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial B_R(0), \end{cases}$$

con $R > 0$. Demuestra que $u \equiv 0$ si

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{u(x)}{\log |x|} = 0, \quad \text{en el caso } \; n = 2, \text{ ó}$$
$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0, \quad \text{en el caso } \; n \geq 3.$$

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Discute (es decir, demuestra o da un contraejemplo de) la unicidad de la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ al *problema de Robin*:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + au = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ y $a > 0$ es una constante. Aquí $\partial u / \partial n = \nabla u \cdot \hat{n}$ denota la derivada normal exterior de u en cada punto de $\partial\Omega$.

Total: 100 pts.