Lección 1.10 : Espacio fase, campo de tangentes: aplicaciones.

Flujo fase: espacio fase M

$x \in M$ "estado"

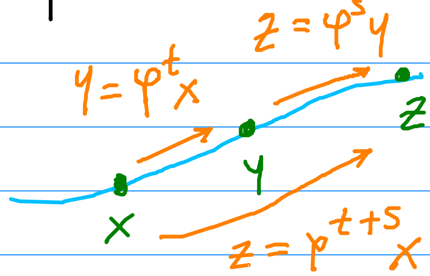
Después de cierto tiempo $t>0$, el estado del proceso inicialmente en M se queda en M:

$$\underbrace{\varphi^t x}_{\text{estado a tiempo } t>0 \text{ de un proceso que inicialmente está en } M} \in M$$

$$\varphi^t : M \longrightarrow M \qquad \forall\, t>0$$

mapeo, intuitivamente se debe cumplir:

- $\varphi^0 x := \lim\limits_{t\to 0^+} \varphi^t x = x$
- para $s>0, t>0$, el estado $y = \varphi^t x \in M$ como estado "inicial" produce $z = \varphi^s y = \varphi^s \varphi^t x$



Debe ser igual a $\varphi^{s+t} x = z$

"Propiedad de semigrupo"

Al mapeo φ^t le llamamos "flujo fase".

Métodos geométricos

Sea $u \in C^1(I; \mathbb{R})$, $t \in I$; sea la curva

$$\mathcal{C} = \{ (t, u(t)) \in D \subset \mathbb{R}^2 : t \in I \} \quad \ldots |1|$$

En $(t_1, u(t_1))$, $t_1 \in I$ constante,
$\quad\quad\; \| $
$(t_1, \ddot{u}_1)$

la curva tiene como vector tangente:

$$\frac{d}{dt}\left(t, u(t)\right)\Big|_{t=t_1} = \left(1, \frac{du}{dt}\Big|_{t_1}\right)$$

Si u es solución de

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad f \in C^1$$

entonces $(1, f(t_1, u_1))$ es el vector tangente en $t=t_1$.

$f(t,u)$ es el campo de tangentes de la solución.

Ejemplos :

(a) Sea la ecuación

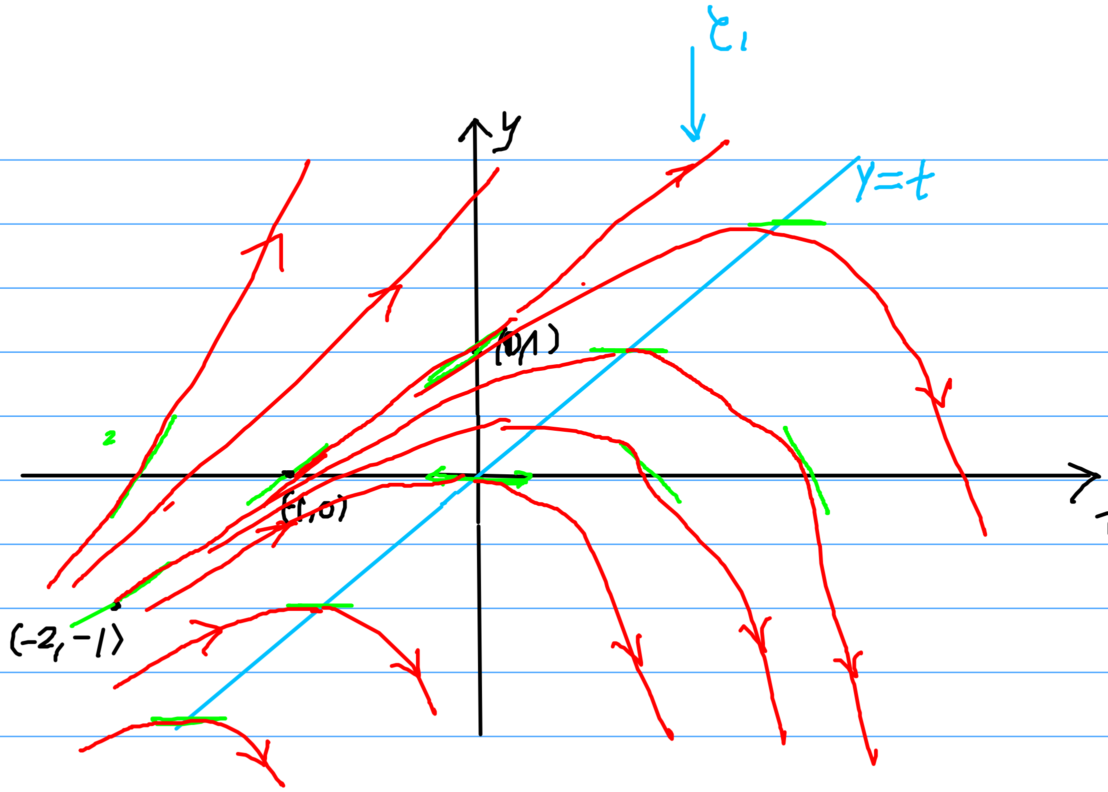
$$\frac{dy}{dt} = y - t \qquad \cdots (2)$$

$t \in \mathbb{R}$. $f(t,y) = y - t$. Notamos que:

- $f(t,y) = 0$ sobre la curva $y = t$
- $\frac{dy}{dt} = f(t,y) \begin{cases} > 0 & \text{si } y > t \\ < 0 & \text{si } y < t \end{cases}$

(t,y)	$f(t,y)$
→ $(0,0)$	0
$(1,0)$	-1
$(0,-1)$	-1
$(0,1)$	1
$(-1,0)$	1
$(-2,-1)$	1
$(2,0)$	-2
$(-2,0)$	2
$(0,1)$	1

$f(\cdot,\cdot)$ – pendiente de $y = y(t)$



Los puntos sobre la curva

$$\mathcal{C}_1 = \{y = t+1\}$$

tienen valor de f constante:

$$f(t, t+1) = (t+1) - t = 1$$

$\mathcal{C}_1$ es una curva solución invariante.

$y(t) := t+1$ satisface

$$\frac{dy}{dt} = 1 = y(t) - t$$

Ejercicio: resolver con factor integrante.

Solución: $y(t) = t+1 + Ce^t$

$C \in \mathbb{R}$ constante

Si $c \neq 0$ $\quad y(t) \to \begin{cases} \infty & \text{si } c \geq 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0. \end{cases}$

(b) Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = e^{y^2} \sin^2 y \qquad \cdots (3)$$

(3) ecuación autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) := e^{y^2} \sin^2 y$$

Separación de variables:

$$\frac{dy}{e^{y^2} \sin^2 y} = dt$$

Si $y(t_0) = y_0$ entonces

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dw}{e^{w^2} \sin^2 w} = t - t_0$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) = e^{y^2} \sin^2 y \geq 0 \quad \forall y$$

Soluciones no decrecientes. $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntos de equilibrio: $f(y_k) = 0$

ssi $y_k = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$(\sin y_k = 0)$

Si $y(t_0) = y_k$ entonces la solución permanece constante.

En la sucesión $y_n = \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ En esos puntos

$$\sin^2 y_n = \left(\sin^2\left(\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \equiv 1$$

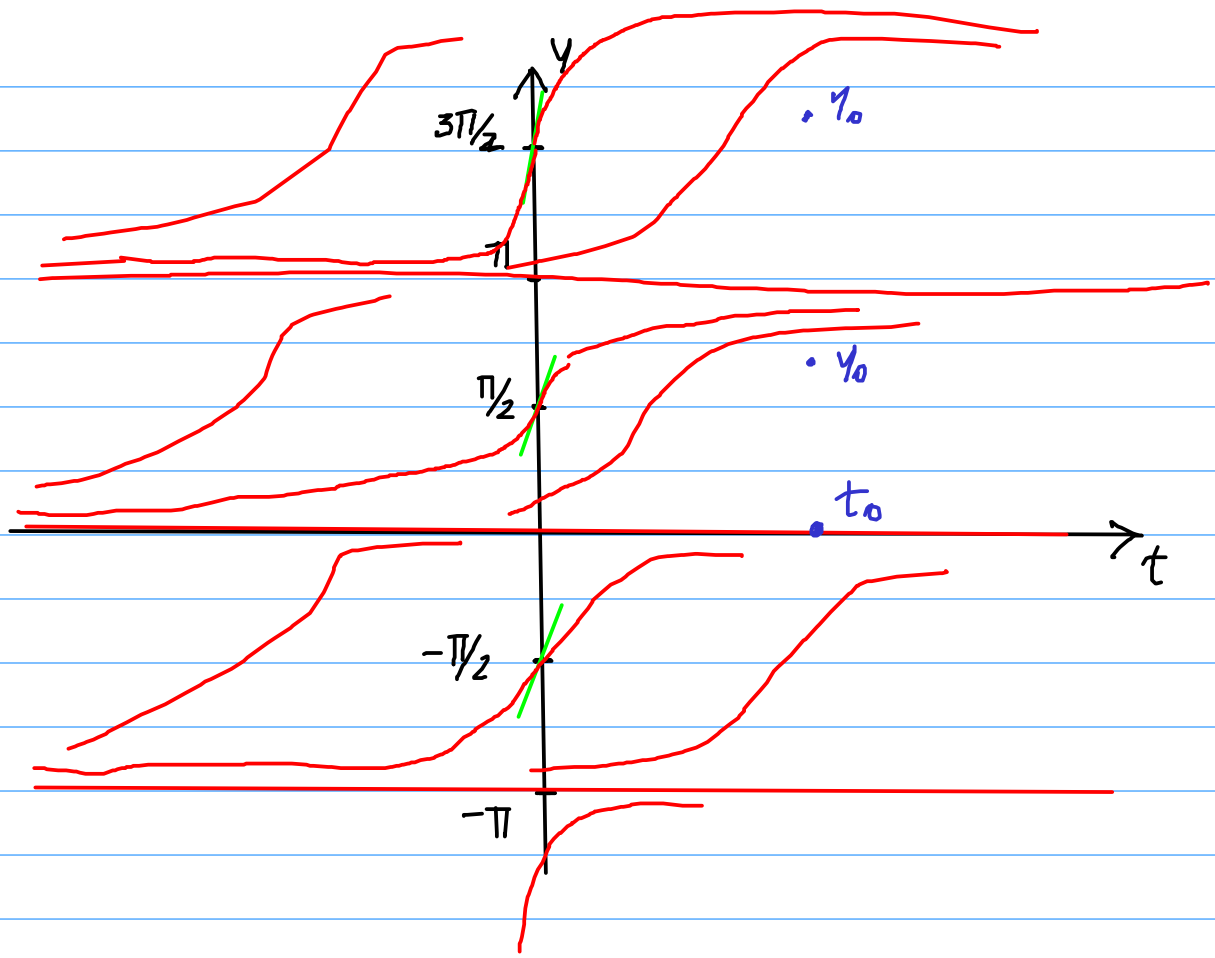
$$f(y_n) = f\left(\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = e^{(2n+1)^2\pi^2/4}$$

$n=0, \quad f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi^2/4} \approx 11.8$

$n=1, \quad f\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = e^{9\pi^2/4} \approx 44 \times 10^8$

$n=2, \quad f\left(\pm\frac{5\pi}{2}\right) = e^{25\pi^2/4} \approx ?$

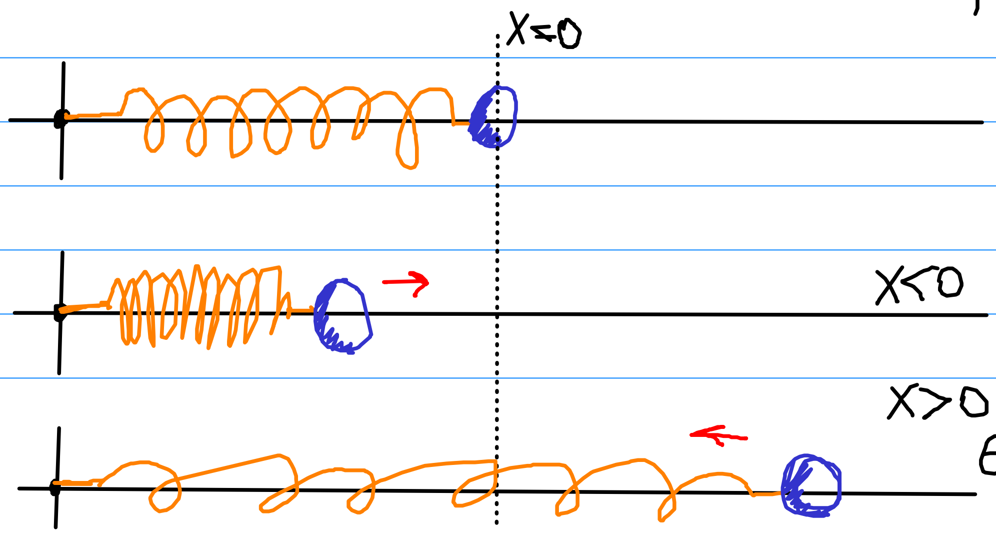
Campo de tangentes:



Ejercicio: resolver numéricamente la ecuación (3) para distintos valores de y_0.

Espacio fase: oscilador armónico.

Objeto de masa $m>0$, sujeto a un resorte sobre una tabla sin fricción.



Sea $x = x(t) \in \mathbb{R}$ posición del objeto respecto al reposo $(x=0)$.

2a. ley de Newton: $F = m \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Ley empírica: ley de Hooke

$$F = -kx$$ $k>0$ coeficiente del resorte

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$x(0) = x_0$
$x'(0) = v(0) = v_0$

$v = \dfrac{dx}{dt}$ velocidad

$$v' + \frac{k}{m}x = 0$$

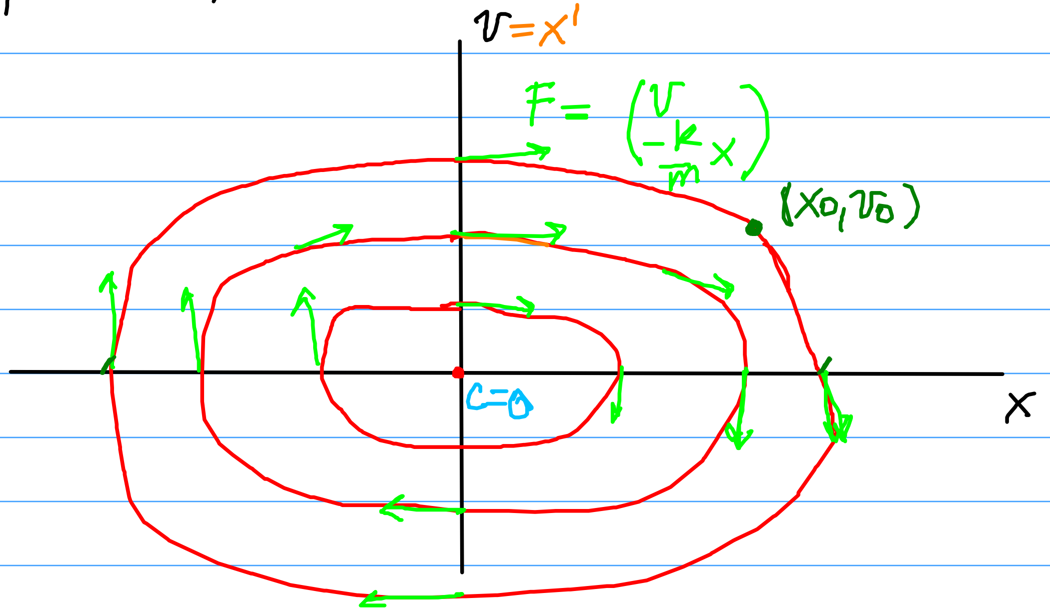
$$\Rightarrow \quad vv' + \frac{k}{m}xx' = 0$$ $' = \dfrac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2 + \frac{k}{m}x^2 = C,$$ $C \in \mathbb{R}$ constante

Necesariamente $C \geq 0$.

"Espacio fase" : $(x,v) = (x,x')$



Toda solución $(x(t), x'(t)) \in \mathcal{E}_c$ (elipse)

$\forall\ c \geq 0$ constante

La ecuación se puede escribir como

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = F(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix}$$

dirección del flujo en el espacio fase

El sistema no disipa energía:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{energía potencial (Hooke)}} = \text{const.} = \underset{\text{constante}}{\underset{\downarrow}{E}}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv(0)^2 + \frac{1}{2}kx(0)^2$$