Lección 1.2: Ejemplos. 2a. ley de Newton y modelo económico de Solow.

Ejemplos:

(A) segunda ley de Newton

Supongamos que $x = x(t)$ es la posición de un objeto de masa $m>0$ a tiempo $t>0$. Asumimos que fuerzas netas actúan sobre el objeto,

Posición del objeto		$x(t)$	$\in \mathbb{R}^3$
Velocidad	"	$x'(t)$	"
Aceleración	"	$x''(t)$	"

2a. ley de Newton: Fuerza neta actuando sobre el objeto es igual al producto de su masa por su aceleración

$$\vec{F}_{neta}(t) = m x''(t) \qquad \cdots (1)$$

Ejemplo: (i) caída libre.

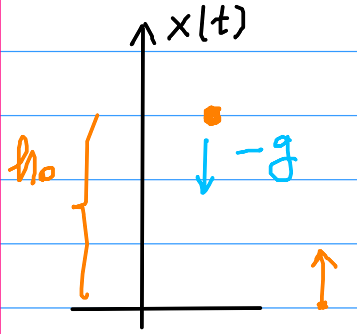
Galileo: objeto de masa $m>0$ se suelta de una altura $h_0>0$ a tiempo $t=0$.

$\mathbb{R} \ni x(t)$ – altura del objeto.

Observación experimental: los objetos caen con la misma aceleración constante, $g>0$.

$g \approx 9.8 \ m/s^2$ aceleración de la gravedad en la sup. terrestre.

ED (1) $\Rightarrow$ $\vec{F}_{neta} = m x''(t) = -mg$



$x(0) = h_0 > 0$
$x'(0) = 0$

Integración directa: $x''(t) = -g$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$

El tiempo de colisión es independiente de la masa:

$$T_{col} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} > 0$$

(B) Modelo de desarrollo económico de Solow (macroeconomía)

En la economía de un país:

K – capital (\$, infraestructura)
L – trabajo
Q – producción
t – tiempo $t > 0$.

Hipótesis:

(H1) La producción es función del trabajo aplicado y del capital existente:

$$Q = f(L,K) \quad \cdots (1)$$

(H2) Observación: crecimiento a escala constante. Si multiplicamos L y K por un factor $\alpha>0$ la producción resultante es multiplicada por la misma constante

$$f(\alpha L, \alpha K) = \alpha f(L,K) \quad \cdots (2)$$

f es homogénea de grado 1.

Ejemplo: función de Cobb-Douglas

$$f(L,K) = K^{1/3} L^{2/3} \quad \cdots (3)$$

(H3) Una proporción constante de la producción se invierte en capital:

$$\frac{dK}{dt} = sQ, \quad \text{con } s>0 \quad \cdots (4)$$

(H4) El trabajo crece proporcionalmente al trabajo existente

$$\frac{dL}{dt} = \lambda L, \qquad \lambda > 0 \qquad \cdots (5)$$

$\lambda > 0$ – razón de cambio per cápita de la población.

La solución de (5) es:

$$L(t) = L_0 e^{\lambda(t-t_0)} \qquad \cdots (6)$$

con $L_0 = L(t_0) > 0$ constante.

Sust. (6) en (4):

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = s f\left(L_0 e^{\lambda(t-t_0)}, K \right) \\ K(t_0) = K_0 \end{cases} \qquad \cdots (7)$$

donde $K_0 > 0$ const.

Nótese que la ecuación (7) es no autónoma.

Por la hipótesis (H2) podemos transformar el modelo (7) en autónomo.

$$(2) \Rightarrow \quad f(L,K) = f(L, L(K/L)) = L f(1, K/L)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = s f(L,K) = s L f(1, K/L)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} = s f(1, K/L)$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} - \frac{K}{L^2}\frac{dL}{dt}$$

$$\overset{(5)}{=} s f(1, K/L) - \lambda \frac{K}{L}$$

Definimos $k := \dfrac{K}{L}$

$$g(k) := f(1, k)$$

para obtener

$$\left.\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= s\,g(k) - \lambda k \\ k(t_0) &= k_0 := K_0/L_0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Modelo de desarrollo econ. de Solow.

Particularizamos (8) a
- $t_0 = 0$
- Cobb-Douglas $g(k) = f(1, k) = k^{1/3}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= s k^{1/3} - \lambda k \\ k(0) &= k_0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$k_0 > 0$, $s > 0$. (9) es <u>autónoma</u>

(a) es de la forma $\dfrac{dk}{dt} = F(k)$

$:= s k^{1/3} - \lambda k$

¿$F(k) = 0$?

- $k = 0$
- $k = (s/\lambda)^{3/2}$

En ellos: $\dfrac{dk}{dt} = 0$; puntos de equilibrio.

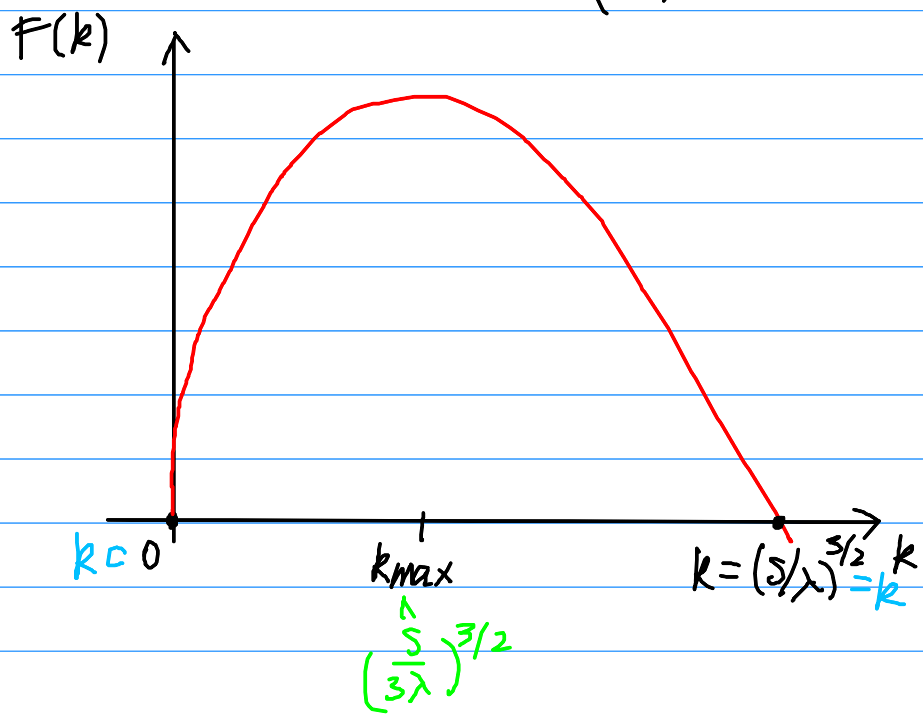
$$\frac{dF}{dk} = \frac{s}{3} k^{-2/3} - \lambda$$

$\therefore$

$\dfrac{dF}{dk} > 0$ si $0 < k < \left(\dfrac{s}{3\lambda}\right)^{3/2}$

$\dfrac{dF}{dk} < 0$ si $\underbrace{\left(\dfrac{s}{3\lambda}\right)^{3/2}} < k < \left(\dfrac{s}{\lambda}\right)^{3/2}$

$$k_{max} = \left(\frac{s}{3\lambda}\right)^{3/2}$$



Intuición : cuando $k \sim 0^+$, $k^{1/3} > k$

$\therefore \frac{dk}{dt} > 0.$

$k=0$ es "inestable" : para $k_0 \in (0, (s/3\lambda)^{3/2})$
$dk/dt > 0$ y k se aleja de $k=0$.

La ecuación (9) es "separable" :

$$\frac{dk}{dt} = F(k) = s\left(k^{1/3} - \frac{\lambda}{s}k\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dk}{F(k)} = dt$$

$$\frac{dy}{dt} = F(y)H(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{F(y)} = H(t)\,dt$$

"separabilidad"

$$\therefore \quad \frac{dk}{s\left(k^{1/3} - \frac{\lambda}{s}k\right)} = dt$$

Integrando : sea $k(0) = k_0 \in (0, (s/\lambda)^{3/2})$

$$\frac{1}{s}\int_{k_0}^{k} \frac{d\xi}{\left(\xi^{1/3} - \frac{\lambda}{s}\xi\right)} = \int_0^t d\tau = t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{s}\int_{k_0}^{k} \frac{\xi^{-1/3}\,d\xi}{\left(1 - \frac{\lambda}{s}\xi^{2/3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{s}\int_{k_0}^{k}\left(\left(-\frac{3}{2}\frac{s}{\lambda}\right)\frac{d}{d\xi}\log\left(1-\frac{\lambda}{s}\xi^{2/3}\right)\right)d\xi$$

$$= -\frac{3}{2\lambda}\left(\log\left(1-\frac{\lambda}{s}k^{2/3}\right)-\log\left(1-\frac{\lambda}{s}k_0^{2/3}\right)\right)$$

Es decir,

$$\frac{2\lambda}{3}t = \log\left(\frac{1-\frac{\lambda}{s}k_0^{2/3}}{1-\frac{\lambda}{s}k^{2/3}}\right)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^{\frac{2\lambda}{3}t} = \frac{1-\frac{\lambda}{s}k_0^{2/3}}{1-\frac{\lambda}{s}k^{2/3}}$$

$$\therefore \quad 1-\frac{\lambda}{s}k^{2/3} = e^{-\frac{2\lambda}{3}t}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{s}k_0^{2/3}\right)}_{>0} \longrightarrow 0$$

si $t\to\infty$

Es decir, $k(t)\longrightarrow\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{3/2}$ cuando $t\to\infty$

La solución siempre tiende al punto de equilibrio $(s/\lambda)^{3/2}$ cuando $t\to\infty$ si $k_0\in(0,(s/\lambda)^{3/2})$.

Ejercicio: verificar este comportamiento si $k_0 > (s/\lambda)^{3/2}$.

Si $k_0 \equiv (s/\lambda)^{3/2} \Rightarrow k(t)\equiv\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{3/2}$.

El punto de equilibrio $(s/\lambda)^{3/2}$ es "estable".

En términos del capital y el trabajo:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \longrightarrow \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{3/2} =: C_1$$

si $t \to \infty$

Esto implica que

$$K(t) \sim C_1 L(t) = C_1 L_0 e^{\lambda t}$$

asintóticamente cuando $t \to \infty$.

cuando $t \gg 1$, $K(t)$ crece exponencialmente con mismo exponente $\lambda > 0$ que el trabajo.

Interpretación: aunque el capital inicial sea pequeño $K_0 \approx 0^+$, crece rápido al inicio y se estaciona en una dinámica proporcional al trabajo.