Lección 1.6 : Trayectorias ortogonales (continuación). Ecuaciones exactas.

Ejemplos (continuación) :

(c) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$y = x - 1 + Ce^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Derivando : $y' = 1 - Ce^{-x}$

Despejando C : $C = (y+1-x)e^{x}$

Sustituyendo : $y' = 1 - (y+1-x)e^{x}e^{-x}$

$(x, y(x)) \rightarrow (1, y'(x))$ tangentes

$(x, w(x)) \rightarrow (1, w'(x))$

$\Rightarrow \; 1 + w'(x)y'(x) = 0$

ortogonales

$$= x - y$$

$y \leftrightarrow w$

$y' \leftrightarrow -\frac{1}{w'}$

Ecuación de las ortogonales :

$$-\frac{1}{w'} = x - w$$

$$\Rightarrow \quad ww' - xw' = 1$$

Truco : multiplicar por e^{w}

$$(w-x)e^{w}w' - e^{w} = 0$$

Por lo tanto :

$$\frac{d}{dx}\left((w-x-1)e^{w} \right) = (w'-1)e^{w} + w'e^{w}(w-x-1)$$

$$= \cancel{w'e^{w}} - e^{w} + ww'e^{w} - xw'e^{w} + $$

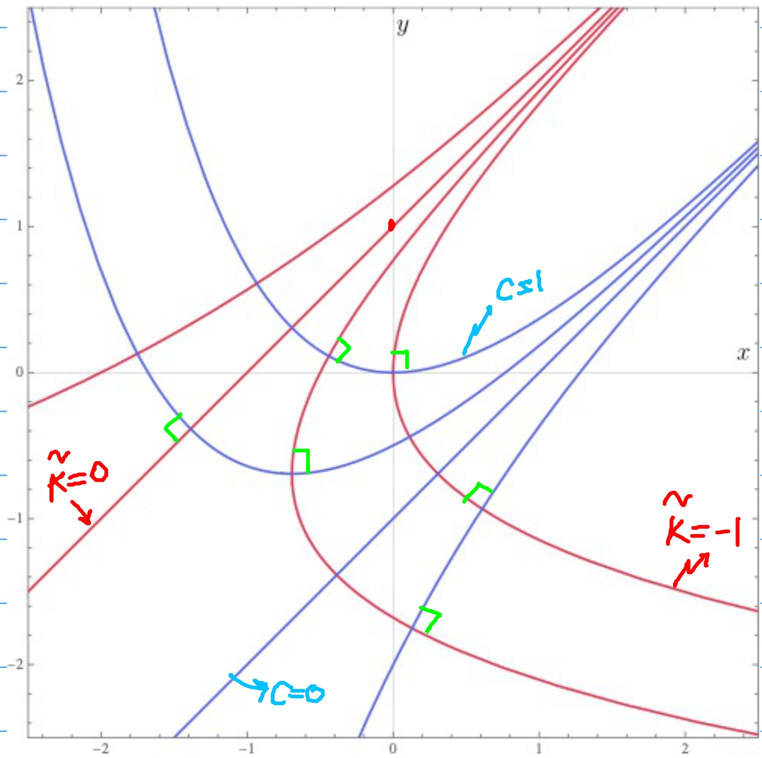
$$- \cancel{w'e^{w}}$$

$$= e^{w}\left((w-x)w' - 1\right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad (w-1-x)e^{w} = \tilde{K} \quad \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad x = y - \tilde{K}e^{-y} - 1$$



Ecuaciones exactas

Provienen de una relación de la forma

$$(1)\ \ldots \qquad \Phi(x, y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

C constante.

Supongamos que $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ y $y = y(x) \in C^1(\mathbb{R})$, satisface (1). Derivando

$$(2)\ \ldots \qquad \Phi_x(x, y(x)) + \frac{dy}{dx}\Phi_y(x, y(x)) = 0$$

Definición Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto y conexo. Sean $A, B \in C(D; \mathbb{R})$ (funciones reales y continuas de $(x,y) \in D$). Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$A(x,y) + \frac{dy}{dx}B(x,y) = 0 \qquad \ldots (3)$$

es llamada exacta si existe una función continuamente diferenciable, $\Phi \in C^1(D; \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_x &= A(x,y) \\ \Phi_y &= B(x,y) \end{aligned}, \qquad \forall (x,y) \in D \qquad \ldots (4)$$

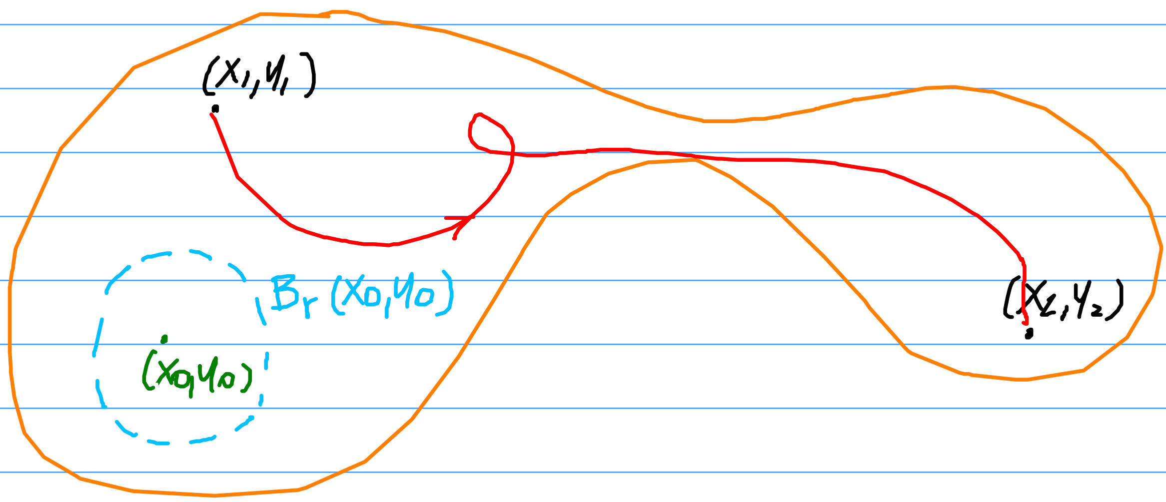
En este caso llamamos a $\Phi(x,y) = C$, c constante, una primitiva de (3).

Observaciones:

(a) $D \subset \mathbb{R}^2$ es conexo (por trayectorias) si para cualesquiera $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in D$ estos puntos pueden unirse mediante una curva continua que se queda enteramente contenida en D. Es decir, si existe $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma \in C([0,1])$ tal que $\gamma(0) = (x_1,y_1)$, $\gamma(1) = (x_2,y_2)$.

(b) $D \subset \mathbb{R}^2$ es abierto si $\forall\ (x_0,y_0) \in D$ existe un radio $r>0$ tal que

$$B_r(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x_0,y_0)-(x,y)| < r\} \subset D$$



Ejemplos de ecuaciones exactas:

(a) $$2x + y^2 + (2xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

Es de la forma (3) con:

$$A(x,y) = 2x + y^2$$

$$B(x,y) = 2xy$$

Es exacta ya que $\exists$ $\Phi(x,y) = x^2 + xy^2$ $\in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\Phi_x = 2x + y^2 = A(x,y)$$

$$\Phi_y = 2xy = B(x,y)$$

La primitiva de la ecuación es

$$\Phi(x,y) = x^2 + xy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

(b) Sea $(2x + 3\cos y) + (2y - 3x\sin y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

Aquí: $A(x,y) = 2x + 3\cos y$
$B(x,y) = 2y - 3x\sin y$

La ecuación es exacta: $\exists$

$$\Phi(x,y) = x^2 + 3x\cos y + y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

tal que $\Phi_x = A(x,y)$
$\Phi_y = B(x,y)$

Primitiva: $\Phi(x,y) = x^2 + 3x\cos y + y^2 = C$

$C \in \mathbb{R}$ constante.

Lema (existencia local y unicidad de soluciones a ecuaciones exactas)

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto, conexo, $A, B \in C(D)$, tales que la ecuación (3) es exactas. Entonces:

(i) una función $y : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, tal que $(x, y(x)) \in D$, $\forall x \in I$, es solución de (3) en D si y sólo si

$$\Phi(x, y(x)) \text{ es constante } \forall x \in I$$

(ii) Para todo $(x_0, y_0) \in D$, tal que $B(x_0, y_0) \neq 0$ el problema de valores iniciales (3') con $y(x_0) = y_0$ es soluble localmente (es decir, existe una solución en un subintervalo o vecindad $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, con $\delta > 0$, y dicha solución, $y = y(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ es única. La curva de la solución está contenida en el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = \Phi(x_0, y_0)\}.$$

$$\{(x, y(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \subset \{\Phi(x,y) = \Phi(x_0, y_0)\}$$

Demostración

(i) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(x, y(x)) \in D$ $\forall\, x \in I$. Entonces $y \in C^1(I)$ es solución de (3) si y sólo si

$$0 = A(x, y(x)) + \frac{dy}{dx} B(x, y(x))$$
$$= \Phi_x(x, y(x)) + \frac{dy}{dx} \Phi_y(x, y(x))$$
$$= \frac{d}{dx}\Big(\Phi(x, y(x)) \Big)$$

es decir, $\Phi(x, y(x)) = C$, constante $\forall\, x \in I$.

(ii) Por hipótesis: $B(x_0, y_0) = \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$

Por el teo. de la función implícita: existen una vecindad $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, con $\delta > 0$, una función

$$y : I_\delta \to N(y_0)$$

diferenciable (aquí $N(y_0)$ denota una vecindad de y_0, $N(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) tales que:

- $y(x_0) = y_0$
- $\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0) \quad \forall\, x \in I_\delta$

y

- $$\frac{dy}{dx} = - \frac{\Phi_x(x, y(x))}{\Phi_y(x, y(x))}.$$

Es decir, $y \in C^1(I_\delta)$ es solución local de (3)' con $y(x_0) = y_0$ y

$$\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0) \quad \forall x \in I_\delta$$

$\square$

¿Cómo saber si una ecuación es exacta?

Lema (test de exactitud)

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto y conexo. Sean $A, B : D \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciables ($A, B \in C^1(D)$). Entonces la ecuación (3) es exacta en D si y sólo si

$$(5) \ldots \qquad A_y(x,y) = B_x(x,y), \quad \forall (x,y) \in D$$

Demostración

"$\Rightarrow$" Si la ecuación es exacta entonces $\exists\ \Phi \in C^1(D)$ tal que $\Phi_x = A$, $\Phi_y = B$.

Dado que $A, B \in C^1(D)$ y que D es conexo, por el lema de Schwarz (Cálculo III) obtenemos

$$\Phi \in C^2(D), \qquad A_y = \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = B_x \quad \forall (x,y) \in D.$$

D conexo
(lema de Schwarz)