Lección 1.7 : Test de exactitud. Factor integrante.

Test de exactitud :

$$A(x,y) + \frac{dy}{dx} B(x,y) = 0$$

Si $A, B \in C^1(D)$, la ecuación es exacta ssi

$$A_y = B_x \quad \text{en } \underset{\text{conexo}}{D} \quad \cdots (1)$$

Esbozo de demostración

"$\Leftarrow$" para $(x_0,y_0), (x,y) \in D$, definimos la integral de línea

$$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} A(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x} + B(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{y}$$

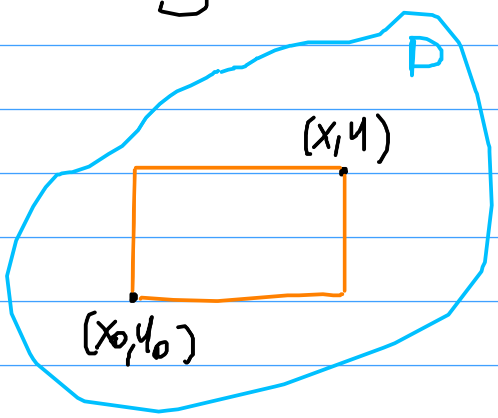
$$= \int_0^1 \left[A(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) \frac{d\tilde{x}}{dt} + B(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) \frac{d\tilde{y}}{dt} \right] dt$$

donde $\{ (\tilde{x},\tilde{y})(t) \; : \; t \in [0,1] \} \subset D$ es una curva de clase C^1 tal que $(\tilde{x},\tilde{y})(0) = (x_0,y_0)$, $(\tilde{x},\tilde{y})(1) = (x,y)$.

Dado que $A, B \in C^1(D)$, D abierto y conexo, el valor de la integral no depende de la curva. Se demuestra que

$$\Phi \in C^2(D), \quad \Phi_x = A, \quad \Phi_y = B.$$

Por ejemplo, supongamos que el rectángulo $[x_0, x] \times [y_0, y] \subset D$



Dado que $A_y = B_x$ en D definimos

$$\Phi(x,y) := \int_{x_0}^{x} A(\xi, y)\, d\xi + \psi(y)$$

ψ - por determinar. $\psi \in C^1$.

Derivando,

$$\Phi_y(x,y) = \int_{x_0}^{x} A_y(\xi, y)\, d\xi + \psi'(y)$$

hipótesis

$$= \int_{x_0}^{x} B_x(\xi, y)\, d\xi + \psi'(y)$$

$$= B(x,y) \underbrace{- B(x_0,y_0) + \psi'(y)}_{=0}$$

Escogemos

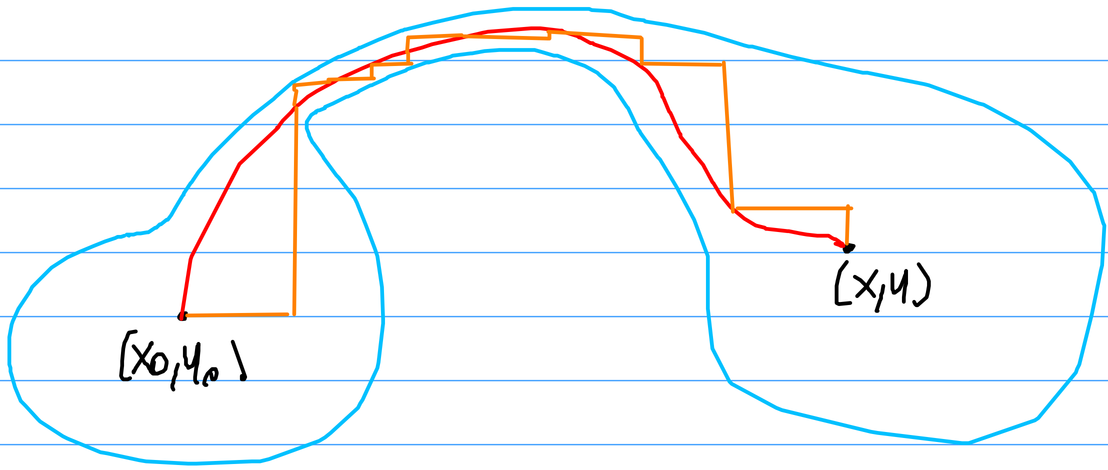
$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} B(x_0, \xi)\, d\xi + C$$

Tomando $C=0$ obtenemos

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} A(\xi,y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} B(x_0,\xi)\,d\xi$$

claramente $\Phi \in C^2$ (en el rectángulo) y satisface $\Phi_x = A$, $\Phi_y = B$.

¿Por qué funciona este argumento con D conexo por trayectorias?



Aproximamos la curva por segmentos donde esta construcción funciona.

$\square$

Ejemplos:

(a) Sea $$2x(e^{x^2}y-1) + \frac{dy}{dx}\, e^{x^2} = 0$$

Aquí: $$A(x,y) = 2x(e^{x^2}y-1) \in C^1$$
$$B(x,y) = e^{x^2} \in C^1$$

Test: $A_y = 2xe^{x^2}$

$B_x = 2xe^{x^2} = A_y \Rightarrow$ exacta.

La primitiva es

$$\Phi(x,y) = \int^y B\,dy + \varphi(x)$$

$$= \int^y e^{x^2}\,dy + \varphi(x)$$

$$= ye^{x^2} + \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_x = 2xye^{x^2} + \varphi'(x) = A(x,y)$$

$$= 2xye^{x^2} - 2x$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x) = -2x \Rightarrow \varphi(x) = -x^2 + \tilde{C}$$

La primitiva es:

$$\Phi(x,y) = ye^{x^2} - x^2 = C,$$

C constante.

$$y = e^{-x^2}(C + x^2)$$ familia de soluciones.

(b) Hallar las primitivas de la ec.

$$(\cos y + y\cos x) + \frac{dy}{dx}(\sin x - x\sin y) = 0$$

Aquí:

$$A(x,y) = \cos y + y\cos x \in C^1$$

$$B(x,y) = \sin x - x\sin y \in C^1$$

Test:

$$A_y = -\sin y + \cos x$$

$$B_x = \cos x - \sin y = A_y$$

$\therefore$ exacta

Así,

$$\Phi(x,y) = \int^x A\, dx + \psi(y)$$

$$= x\cos y + y\sin x + \psi(y)$$

$$\Rightarrow \Phi_y = -x\sin y + \sin x + \psi'(y)$$

$$= B(x,y)$$

$$= \sin x - x\sin y + \psi'(y)$$

$$\Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi = \tilde{C}$$

Las primitivas son:

$$\Phi(x,y) = x\cos y + y\sin x = C$$

C constante

¿Qué hacemos si la ecuación no es exacta?

Supongamos que la ecuación

$$A(x,y) + \frac{dy}{dx} B(x,y) = 0 \qquad \cdots (1)$$

no es exacta. Supongamos que $A, B \in C^1(D)$. Por el lema de la clase pasada necesariamente

$$A_y \neq B_x$$

Definición una función $\mu = \mu(x,y)$, $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mu \in C^1(D)$, es un factor integrante de la ecuación (1) si la ecuación

$$(2) \cdots \quad \mu(x,y) A(x,y) + \mu(x,y) B(x,y) \frac{dy}{dx} = 0$$

es exacta.

Test de ecuaciones exactas

$\Rightarrow$ (2) es exacta ssi

$$\tilde{A}(x,y) := \mu(x,y) A(x,y)$$
$$\tilde{B}(x,y) := \mu(x,y) B(x,y)$$

satisfacen $\quad \tilde{A}_y = \tilde{B}_x$.

Por la regla de la cadena

$$\tilde{A}_y = \mu_y A + \mu A_y$$

$$\tilde{B}_x = \mu_x B + \mu B_x$$

$$\underset{\tilde{A}_y = \tilde{B}_x}{\Rightarrow} \quad B\mu_x - A\mu_y = \underbrace{(A_y - B_x)}_{\neq 0}\mu \quad \cdots (3)$$

(3) es una ecuación diferencial parcial para μ.

En algunas situaciones es posible resolver (3) directamente.

Hipótesis : $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto y conexo, $A, B \in C^1(D)$

y $A_y \neq B_x$ (no exacta)

Casos :

(a) Si $\dfrac{A_y - B_x}{B} = f(x)$ es una función sólo de x y $B \neq 0$ entonces

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x f(\xi)\, d\xi \right)$$

es factor integrante.

En efecto, $A_y \neq B_x$ la ecuación (3) es equivalente a

$$\mu = \frac{B\mu_x - A\mu_y}{A_y - B_x} \quad \cdots (4)$$

Por la hipótesis,

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x \underbrace{f(\xi)}_{\frac{A_y - B_x}{B}} d\xi \right)$$

es solución de

- $$\mu_y = 0$$
- $$\mu_x = f(x) \exp\left(\int^x f(\xi)\, d\xi \right)$$

$$= \left(\frac{A_y - B_x}{B} \right) \mu(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B\mu_x}{A_y - B_x} = \mu \Rightarrow (4)$$

es decir, μ es solución de (4).

$\therefore$ es factor integrante

Ejemplo: sea

$$\rightarrow \quad (x^2 + y^2 - x) + xy \frac{dy}{dx} = 0$$

Aquí: $A(x,y) = x^2 + y^2 - x$

$B(x,y) = xy$

Test: $A_y = 2y \neq B_x = y$

no es exacta

Pero, $\dfrac{A_y - B_x}{B} = \dfrac{2y - y}{xy} = \dfrac{1}{x} = f(x)$

función sólo de x.

$\Rightarrow$ caso (a).

El factor integrante es

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x f(\xi)\, d\xi\right)$$

$$= \exp\left(\int^x \frac{d\xi}{\xi}\right).$$

$$= \exp(\log x) = x$$

Mult. la ecuación por x:

$$x(x^2 + y^2 - x) + x^2 y \frac{dy}{dx} = 0$$

Aquí: $\tilde{A} = x^3 + xy^2 - x^2$

$\tilde{B} = x^2 y$

Test: $\tilde{A}_y = 2xy$

$\tilde{B}_x = 2xy = \tilde{A}_y$ exacta.

Primitiva :

$$\Phi(x,y) = \int^{y} \tilde{B}(x,\xi)\, d\xi + \psi(x)$$

$$= \int^{y} x^2\xi \, d\xi + \psi(x)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 y^2 + \psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_x = xy^2 + \psi'(x) = \tilde{A} = x^3 + xy^2 - x^2$$

$$\therefore \quad \psi'(x) = x^3 - x^2$$

$$\psi(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \tilde{C}$$

Primitiva :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} = C$$

C constante.