Lección 1.8 : Factor integrante (continuación).

Existen casos donde es posible encontrar el factor integrante:

(1) ... $A(x,y) + \frac{dy}{dx} B(x,y) = 0$

$A, B \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ conexo, abierto.

Caso (a): $\frac{A_y - B_x}{B} = f(x)$ función sólo de x.

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x f(\xi)\, d\xi \right)$$

Caso (b): Si $\frac{B_x - A_y}{A} = g(y)$ es función sólo de y, $A \neq 0$, entonces

$$\mu(y) = \exp\left(\int^y g(\xi)\, d\xi \right) \quad \ldots (2)$$

es factor integrante.

(1) no es exacta $A_y \neq B_x$.

Ec. del factor integrante:

$$B\mu_x - A\mu_y = \mu(A_y - B_x) \quad \ldots (3)$$

$\mu(y)$ definida en (2) resuelve:

$\cdot\ \mu_x = 0$

$$\cdot\ \mu_y = g(y)\exp\left(\int^y g(\xi)\,d\xi\right)$$
$$= \left(\frac{B_x - A_y}{A}\right)\mu(y)$$
$$\Rightarrow (3).$$

Ejemplo: sea la ecuación

$$y + \left(2xy - e^{-2y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$A(x,y) = y$$
$$B(x,y) = 2xy - e^{-2y}$$

$A_y = 1 \neq B_x = 2y$

no es exacta.

Pero, $$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{2y-1}{y} = 2 - \frac{1}{y}$$
$$=: g(y)$$ función sólo de y

Factor integrante $\mu(y) = \exp\left(\int^y g(\xi)\,d\xi\right)$

$$\int^y g(\xi)\,d\xi = \int^y \left(2 - \frac{1}{\xi}\right)d\xi$$
$$= 2y - \log y$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \exp(2y - \log y)$$
$$= e^{2y}/y$$

Mult. la ec. por μ:

$$\frac{e^{2y}}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y} + \frac{e^{2y}}{y}\left(2xy - e^{-2y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\tilde{A}(x,y) = e^{2y}$$

$$\tilde{B}(x,y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$$

Test: $\tilde{A}_y = 2e^{2y}$

$$\tilde{B}_x = 2e^{2y} = \tilde{A}_y \Rightarrow \text{exacta}$$

$$\Phi(x,y) = \int^x \tilde{A}(\xi, y)\, d\xi + \varphi(y)$$

$$= \int^x e^{2y}\, d\xi + \varphi(y)$$

$$= xe^{2y} + \varphi(y)$$

Así, $\Phi_y = 2xe^{2y} + \varphi'(y)$

$$= \tilde{B} = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi' = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\log y + \tilde{C}$$

La primitiva es

$$\Phi(x,y) = xe^{2y} - \log y = C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

Caso (c): Si A y B son funciones homogéneas del mismo grado $p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ (es decir, f es homogénea de grado p si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$, $\forall \lambda$)

y además, $xA + yB \not\equiv 0$ entonces

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xA+yB} \quad \text{es factor integrante.}$$

Lema de Euler: si f es homogénea de grado p entonces

$$y f_y + x f_x = p f$$

Dem. Derivamos $\lambda^p f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$ con respecto a λ:

$$p \lambda^{p-1} f(x,y) = \lambda x f_x + \lambda y f_y$$

Evaluando en $\lambda = 1 \Rightarrow \quad pf = x f_x + y f_y$

$\square$

Sean
$$\tilde{A} = (xA+yB)^{-1} A$$
$$\tilde{B} = (xA+yB)^{-1} B$$

Por la regla de la cadena:

$$\tilde{A}_y = (xA+yB)^{-2}\Big[(\cancel{x}A+yB)A_y \; + $$
$$- A(\cancel{xA_y} + yB_y + B)\Big]$$
$$= (xA+yB)^{-2}\Big[y(BA_y - AB_y) - AB\Big]$$

$$\tilde{B}_x = (xA+yB)^{-2}\Big[(xA+\cancel{y}B)B_x \; + $$
$$- B(xA_x + A + \cancel{yB_x})\Big]$$
$$= (xA+yB)^{-2}\Big[x(AB_x - BA_x) - AB\Big]$$

A, B homogéneas del mismo grado; por el lema de Euler

$$\tilde{A}_y - \tilde{B}_x =$$
$$= (xA+yB)^{-2}\Big[y(BA_y - AB_y) - x(AB_x - BA_x)\Big]$$
$$= (xA+yB)^{-2}\Big[\underbrace{(xA_x + yA_y)}_{pA}B - \underbrace{(xB_x+yB_y)}_{pB}A\Big]$$

$$\underset{\substack{\text{lema}\\ \text{de Euler}}}{=} (xA+yB)^{-2}\Big[pAB - pBA\Big] = 0.$$

$$\Rightarrow \tilde{A} + \tilde{B}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{es exacta.}$$

Ejemplo: sea $y^2 + (x^2 - xy - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$A = y^2$

$B = x^2 - xy - y^2$

test

$\Rightarrow \begin{array}{l} A_y = 2y \\ \neq B_x = 2x - y \end{array}$

no es exacta.

Por otro lado:

$\dfrac{A_y - B_x}{B} = \dfrac{2y - (2x - y)}{x^2 - xy - y^2}$ no es función sólo de x

$\dfrac{B_x - A_y}{A} = \dfrac{2x - y - 2y}{y^2}$ no es función sólo de y

PERO: A, B son homogéneas de grado 2

$A(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 A(x, y)$
$B(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 B(x, y)$

Además, $xA + yB = \cancel{xy^2} + y(x^2 - \cancel{xy} - y^2)$

$= y(x^2 - y^2) \neq 0$

Factor integrante:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{y(x^2-y^2)} = \frac{1}{xA+yB}$$

Veamos :

$$\frac{y}{x^2-y^2} + \frac{x^2-xy-y^2}{y(x^2-y^2)} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\tilde{A} = \frac{y}{x^2-y^2} \quad , \quad \tilde{B} = \frac{x^2-xy-y^2}{y(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{x}{x^2-y^2}$$

calculando :

$$\tilde{A}_y = \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{2y^2}{(x^2-y^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\tilde{B}_x = -\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{2x^2}{(x^2-y^2)^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2-y^2)^2} = \tilde{A}_y$$

$\therefore$ exacta

Ejercicio : hallar la primitiva

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + \log y$$

$$= C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

caso (d): suponiendo que

$$A = y f(xy)$$

$$B = x g(xy)$$

con $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $f(\xi) \not\equiv g(\xi)$

entonces

$$\mu(x,y) = \left[xy \left(f(xy) - g(xy) \right) \right]^{-1}$$

es factor integrante.

$$\tilde{A} = \frac{f(xy)}{x\left(f(xy) - g(xy)\right)}$$

$$f' = \frac{df}{d\xi}$$

$$\tilde{B} = \frac{g(xy)}{y\left(f(xy) - g(xy)\right)}$$

$$g' = \frac{dg}{d\xi}$$

Derivando:

$$\tilde{A}_y = \frac{\cancel{x} f'}{\cancel{x}(f-g)} - \frac{f \cdot \left(\cancel{x} f' - \cancel{x} g'\right)}{\cancel{x^2}(f-g)^2}$$

$$= \left(\frac{f g' - f' g}{(f-g)^2} \right)(xy)$$

$$\tilde{B}_x = \left(\frac{fg' - f'g}{(f-g)^2}\right)(xy) = \tilde{A}_y$$

$\therefore$ exacta.

Ejemplo :
$$y(2xy+1) + x(1+2xy - x^3y^3)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$A = y(2xy+1)$$

$$B = x(1+2xy - x^3y^3)$$

Test : $A_y = 4xy + 1$

$$B_x = 1 + 4xy - 4x^3y^3 \neq A_y$$

no es exacta.

Además :
- $\dfrac{A_y - B_x}{A}$, $\dfrac{B_x - A_y}{B}$ no son funciones de una sola variable
- A, B no son homogéneas del mismo grado

Sin embargo : $\rightarrow A = y(2xy+1) = y\, f(xy)$

con $f(\xi) = 2\xi + 1$

$\rightarrow B = x(1+2x - x^3y^3) = x\, g(xy)$

con $g(\xi) = 1 + 2\xi - \xi^3$

$$f(\xi) \not\equiv g(\xi)$$

Factor integrante:

$$\mu(x,y) = \left[xy\left(f(xy) - g(xy)\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{xy\left(\cancel{2xy} + \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \cancel{2xy} - x^3y^3\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{x^4y^4}$$

$$\tilde{A} = \frac{2xy^2 + y}{x^4y^4} = \frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y^3}$$

$$\tilde{B} = \frac{x\left(1 + 2xy - x^3y^3\right)}{x^4y^4} = \frac{1}{x^3y^4} + \frac{2}{x^2y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}_y = -\frac{4}{x^3y^3} - \frac{3}{x^4y^4}$$

$$\tilde{B}_x = -\frac{3}{x^4y^4} - \frac{4}{x^3y^3} = \tilde{A}_y$$

$\therefore$ exacta.

Ejercicio: Hallar la primitiva.

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{3x^3y^3} - \frac{1}{x^2y^2} - \log y = C$$

C constante.