Lección 1.9 : Espacio fase, flujo fase. Campo de tangentes.

Factor integrante.

Caso (e) : por inspección.

Sea la ecuación,

$$2xy^4e^y + 2xy^3 + y + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Aquí,
$$A = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$$
$$B = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$$

Test:
$$A_y = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$
$$B_x = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \neq A_y$$

no es exacta.

Además:

A, B no son homogéneas del mismo grado (por el término exponencial).
- A, B no son de la forma $A = y\,f(xy)$, $B = x\,g(xy)$
- Tampoco $(A_y - B_x)A^{-1}$, $(B_x - A_y)B^{-1}$ son funciones de una variable.

¿Qué hacer? Idea: agrupar términos que sean una derivada, lo que queda como factor podría sugerir la forma de μ.

Agrupando los términos marcados

$$\underbrace{y^4\left(2xe^y + x^2e^y\frac{dy}{dx}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y)} + 2xy^3 + y - (x^2y^2 + 3x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sugerencia : $\mu(x,y) = y^{-4}$

Probemos :

$$\tilde{A} = \mu A = y^{-4}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)$$
$$= 2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}$$

$$\tilde{B} = \mu B = y^{-4}(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)$$
$$= x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}_y = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

$$\tilde{B}_x = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} = \tilde{A}_y$$

$\therefore$ $\mu = y^{-4}$ es factor integrante.

Ejercicio: hallar la primitiva

$$\Phi(x,y) = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} = C$$

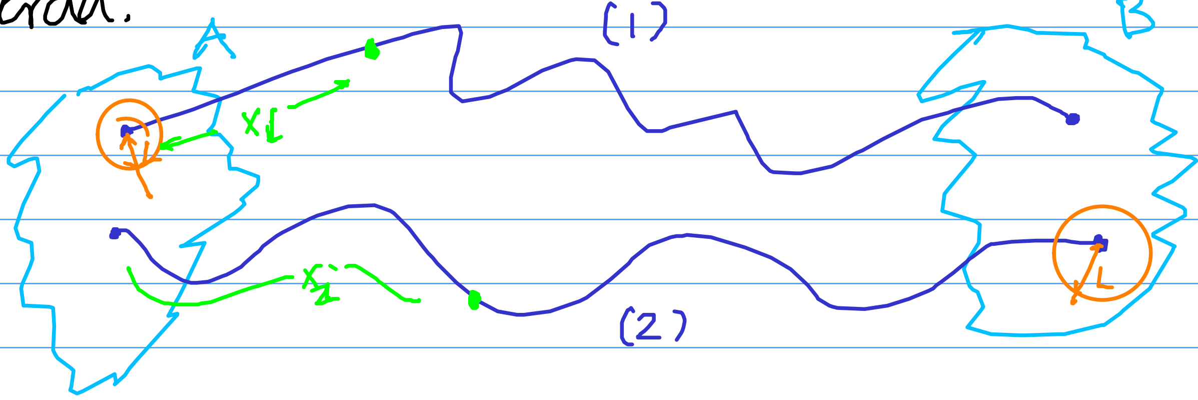
con $C \in \mathbb{R}$ constante.

1.3 Métodos geométricos y espacio fase

Nociones fundamentales $\begin{cases} \cdot \text{ espacio fase} \\ \cdot \text{ flujo fase.} \end{cases}$

Problema de Konstantinov:

Dos ciudades A y B están conectadas por dos autopistas que no se intersectan. Es sabido que dos automóviles que viajan sobre autopistas diferentes y que están conectados por una cuerda cuya longitud menor a $2L$, $L>0$, pueden viajar de A a B sin romper la cuerda.



¿Pueden dos vagones circulares de radio L, cuyos centros se mueven sobre una autopista cada uno y en direcciones opuestas, ir de una ciudad a otra sin chocar?

Solución: Consideramos el cuadrado

$$M = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

La posición de dos vehículos (uno en la autopista 1 y el segundo en la 2) se puede representar por un punto en M, "estado".

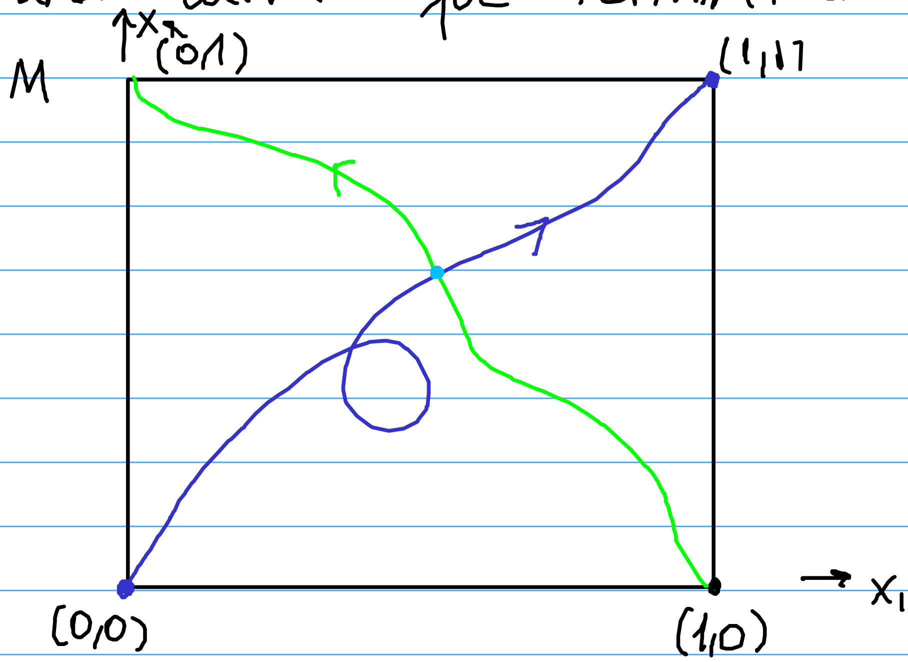
x_i - fracción de la distancia de A a B en la autopista i, $i = 1, 2$, que está entre A y el vehículo o vagón en la autopista.

Así $\exists$ un punto en M que corresponde a cada posible estado del par de vehículos.

M = espacio fase

puntos fase $(x_1, x_2) \in M$.

Autos conectados: ambos inician en A y su posición inicial es $x_1 = x_2 = 0$; el movimiento se puede representar por una curva que termina en $x_1 = x_2 = 1$.



Asimismo, la posición inicial de los vagones corresponde (1,0); el movimiento de los centros de los vagones se representa por una curva que va de (1,0) a (0,1).

Pero, todo par de curvas en el cuadrado que conectan esquinas opuestas se intersectan. Sin importar cómo se muevan los vagones, en algún momento los centros de éstos ocupan el "estado" que ocuparon en algún momento los automóviles. En este estado la distancia entre los centros de los vagones es $< 2L$.

conclusión: no pueden ir de una ciudad a otra sin chocar.