Lección 2.2 : Fórmula de variación de parámetros (continuación).

Fórmula de variación de parámetros

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\left[C + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} b(\xi)\, d\xi \right]$$

solución completa de

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)$$

$C \in \mathbb{R}$, constante, $a, b \in C$.

Observación: Notamos que

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\substack{\text{solución}\\ \text{general de}\\ \text{la ec. homo-}\\ \text{génea}}} + \underbrace{y_p(t)}_{\substack{\text{solución particular}\\ \text{de la ec. no}\\ \text{homogénea}}}$$

donde

$$y_h(t) = C e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \quad \cdots (1)$$

$$y_p(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, dt} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)\, ds}\, b(\xi)\, d\xi \quad \cdots (2)$$

En efecto,

$$\frac{dy_p}{dt} = -a(t)\overbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)\,ds}\, b(\xi)\, d\xi}^{y_p(t)} + \underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}}_{=1} b(t)$$

$$= -a(t)\,y_p + b(t).$$

Corolario Toda solución de

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \qquad \cdots (3)$$

se escribe como $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ donde $y_p(t)$ es cualquier solución particular de la no homogénea (3) y $y_h(t)$ es la solución general de la homogénea. Inversamente la solución general de (3) es $y_h(t) + y_p(t)$.

Demostración: "$\Rightarrow$" Ya se demostró.

"$\Leftarrow$" Si $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_h}{dt} + \frac{dy_p}{dt}$$

$$= -a(t)\,y_h + b(t) - a(t)\,y_p$$

$$= -a(t)\left[y_p + y_h\right] + b(t)$$

$\square$

Nota: supongamos que y_1, y_2 son soluciones de

$$\frac{dy_j}{dt} + a(t)\, y_j = b_j(t), \quad j = 1,2$$

diferente no homogeneidad

Entonces $\alpha y_1 + \beta y_2$ es solución de

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha \frac{dy_1}{dt} + \beta \frac{dy_2}{dt}$$

$$= \alpha\left(b_1 - a y_1\right) + \beta\left(b_2 - a y_2\right)$$

$$= -a\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) + \tilde{b}$$

con $\tilde{b} = \alpha b_1 + \beta b_2$

Es decir, $\alpha y_1 + \beta y_2$ es solución de la ecuación no homogénea con misma $a(t)$ con $\tilde{b}(t)$ modificada adecuadamente, $\tilde{b} = \alpha b_1 + \beta b_2$.

$\Rightarrow$ basta con encontrar soluciones particulares de las ecuaciones para cada y_j para encontrar la solución general a

$$\underbrace{\frac{dy}{dt} + a(t)\, y}_{} = \underbrace{\alpha b_1 + \beta b_2}_{}$$

Nota: para encontrar una solución particular y_p de la no-homogénea a veces es más conveniente observar la ecuación y proponer la solución por inspección.

Por ejemplo, si $a(t) \equiv a$ es constante, la solución particular y_p puede tener una forma parecida al coeficiente $b(t)$.
(Método del "ansatz" del lado derecho)

Ejemplos:

(A) Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + y = \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Claramente, la solución de

$$\frac{dy}{dt} + y = 0$$

es $y_h(t) = Ce^{-t}$. Aquí $a(t) \equiv 1$
$b(t) = \sin t$. Proponemos

$$y_p(t) = A\cos t + B\sin t$$

$$\frac{dy_p}{dt} + y_p = -A\sin t + B\cos t + $$
$$+ A\cos t + B\sin t$$

$$= (B-A)\sin t + (A+B)\cos t$$

$$= b(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow \quad B-A = 1, \quad A+B = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Así, $y_p(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t.$

La solución general es:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{-t}}_{y_h(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t}_{y_p(t)}$$

(B) Sea la ecuación

$$\underbrace{\frac{dy}{dt} + y} = \underbrace{\sin t}_{b_1(t)} + \underbrace{e^t}_{b_2(t)}$$

Por la nota: $b_1(t) = \sin t$

$b_2(t) = e^t$

Para $b_1(t)$: $y_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$ ✓

Para $b_2(t)$: ansatz $y_2(t) = \tilde{A}e^t$

$$\frac{dy_2}{dt} + y_2 = 2\tilde{A}e^t = b_2(t) = e^t$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \frac{1}{2}$$

Así, $\quad y_2(t) = \frac{1}{2}e^t.$

La solución general es :

$$y(t) = \underbrace{Ce^{-t}}_{y_h(t)} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$$

Observación : para recordar la fórmula de variación de parámetros, definimos

$$A(t) = \int^t a(t)\,dt \quad , \quad A'(t) = a(t)$$

mult. la ecuación por $e^{A(t)}$:

$$\underbrace{e^{A(t)}y' + a(t)e^{A(t)}y}_{\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}y\right)} = e^{A(t)}b(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-A(t)}\left[C + \int^t e^{A(s)}b(s)\,ds\right]$$

$\Rightarrow$ fórmula de var. par.

Ejemplo :

(c) Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + \underbrace{(\cos t)}_{a(t)}y = \underbrace{\sin t\,\cos t}_{b(t)}$$

$$a(t) = \cos t, \qquad b(t) = \sin t \cos t$$

$$A(t) = \int^t a(t)\, dt = \sin t$$

$$e^{\sin t} \frac{dy}{dt} + (\cos t) e^{\sin t} y = e^{\sin t} \sin t \cos t$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\sin t} y \right) = e^{\sin t} \sin t \cos t$$

Integrando por partes:

$$e^{\sin t} y = \int^t e^{\sin t} \sin t \cos t \, dt$$

$$= (\sin t - 1) e^{\sin t} + C$$

La solución general es

$$y(t) = \underbrace{C e^{-\sin t}}_{y_h(t)} + \underbrace{(\sin t - 1)}_{y_p(t)}$$

Ansatz del lado derecho: aquí $a(t)$ no es constante pero $a(t)$ y $b(t)$ "se parecen".

Proponemos: $y_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3$

$$\frac{dy_p}{dt} + (\cos t) y_p = -C_1 \sin t + C_2 \cos t +$$

$$+ (\cos t)\left[C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 \right]$$

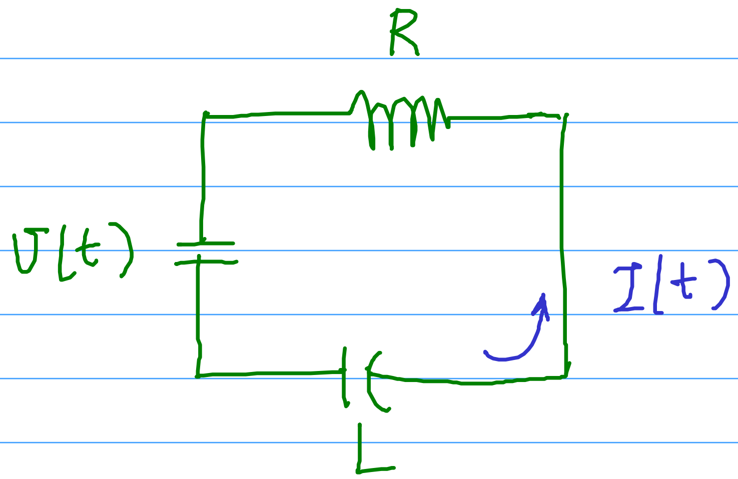
$$= \sin t \cos t$$

$\Rightarrow \quad C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_2 + C_3 = 0 \quad \therefore \quad C_3 = -1.$

$\Rightarrow \quad y_p(t) = \sin t - 1.$

Aplicaciones

I. Circuito eléctrico.



$I(t)$ - corriente eléctrica a tiempo $t > 0$

$R > 0$ - resistencia constante
$L > 0$ - inductancia "

$U(t)$ - potencial eléctrico a tiempo $t > 0$
(función conocida)

Ecuación para la corriente:

$$L \frac{dI}{dt} + R I = U(t) \quad \cdots (1)$$

Casos:

(a) $v(t) \equiv 0$ (no hay voltaje aplicado)

(1) es homogénea $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$

Solución general es

sol. de la homogénea $I_h(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ ... (2)

con $I_0 > 0$, $I_h(0) = I_0$ corriente inicial.

$\forall I_0 > 0$, $I_h(t) \longrightarrow 0$ si $t \to \infty$.