Lección 2.3 : Variación de parámetros (aplicaciones).

Ejemplos (continuación):

I. Circuito eléctrico:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U(t)}{L} \qquad \cdots (1)$$

$R, L > 0$ constantes. $\quad I(0) = I_0 > 0$

Casos: (a) $U(t) \equiv 0$.

(b) Voltaje directo: $U(t) \equiv U_0 > 0$ constante

$$(1) \Rightarrow \quad I' + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L}$$

Solución homogénea: $I_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$

Una solución particular es simplemente

$$I_p(t) = \frac{U_0}{R} \quad \text{constante.}$$

La solución general es:

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$$

Suponiendo $I(0) = I_0 > 0$ entonces

$$I(t) = \left(I_0 - \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}$$

Notamos que $I(t) \to \frac{V_0}{R} > 0$ si $t \to +\infty$ independientemente del valor de I_0.

Nota: Si $I_0 = 0$ entonces

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

(c) Voltaje alterno:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

donde $V_0 > 0$, $\omega > 0$ constante

Las unidades de ω son de frecuencia (1/ tiempo).

ω - frecuencia.

$$\Rightarrow \quad L I' + R I = V_0 \cos \omega t.$$

Ansatz del lado derecho:

$$I_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \quad I_p'(t) = \omega \left(-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \right)$$

Sustituyendo :

$$L\omega\left[-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t\right] +$$
$$R\left[C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right] = V_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \quad (RC_2 - \omega L C_1) \sin \omega t +$$
$$+ (RC_1 + \omega L C_2 - V_0) \cos \omega t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} RC_2 - \omega L C_1 &= 0 \\ RC_1 + \omega L C_2 &= V_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{R}{\omega L} C_2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{R^2}{\omega L} + \omega L\right) C_2 = \left(\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}\right) C_2 = V_0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$C_1 = \frac{R V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

La solución particular es :

$$I_p(t) = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t\right]$$

Notamos que $C_1^2 + C_2^2 = V_0^2$

Por la fórmula trigonométrica

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

podemos definir

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \leq 1$$

$$\sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \leq 1$$

$$\therefore \quad \alpha := \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Es decir,

$$I_p(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\cos\alpha\cos\omega t + \sin\alpha\sin\omega t\right]$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\alpha)$$

La solución es:

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\alpha)$$

oscila con la misma frecuencia

cuando $t \to \infty$ la corriente se aproxima a una traslación ($\alpha = \operatorname{Arctan}(\omega L / R)$) del potencial aplicado (misma frecuencia)

$$I(t) \sim \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \alpha)$$

II. Modelo de nivel de colesterol en la sangre.

Sea $c(t)$ – densidad del colesterol en sangre a tiempo $t \geq 0$ (mg / decilitro)

Modelo:
$$\frac{dc}{dt} = \alpha (C_0 - c) + \beta E \quad \cdots (1)$$

donde C_0 – nivel normal de colesterol.
$\alpha > 0$ – parámetro de "producción" de colesterol
$E > 0$ – razón diaria de ingesta de colesterol
$\beta > 0$ – parámetro de absorción.

Datos clínicos:
$C_0 = 200$ (mg/dl)
$\alpha = 0.1$
$\beta = 0.1$
$E = 400$

Si una persona inicia con $C(0) = 150$ mg/dl ¿Cuál es el valor de C después de $t = 2$ días?

Ecuación homogénea: $\frac{dC}{dt} = -\alpha C$

Solución general de la homogénea es

$$C_h(t) = K e^{-\alpha t}$$

arbitraria

No homogénea:

$$\frac{dC}{dt} + \underbrace{\alpha}_{a(t)\equiv\alpha} C = \underbrace{\alpha C_0 + \beta E}_{b(t)\equiv\alpha C_0+\beta E}$$

Solución particular: $C_p(t) \equiv C_0 + \frac{\beta}{\alpha} E$

constante

$\Rightarrow$ solución general

$$C(t) = K e^{-\alpha t} + C_0 + \frac{\beta}{\alpha} E$$

Si $C(0)$ es conocido entonces

$$K = C(0) - C_0 - \frac{\beta}{\alpha} E$$

$150 - 200 - 400 \quad = -450$

Con los datos : $K = -450 \ mg/dl$

$\Rightarrow \quad C(t) = -450 e^{-(0.1)t} + 600$

En $t=2$: $\quad C(t) \approx -231.6 \ mg/dl$

2.3 Ecuaciones no lineales

- Ecuaciones $\begin{cases} \text{exactas} \\ \text{separables} \end{cases}$ (2.3)
- Factor integrante (2.4)

2.5 Métodos de solución y casos especiales (no lineales de primer orden)

I. Ecuación de Bernoulli.

Sea la ecuación

$$(1) \cdots \qquad y' + a(t)\, y = b(t)\, y^{\alpha}$$

$t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad a, b \in C(I; \mathbb{R}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Vamos a suponer que $\alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1$.

- si $\alpha = 0$ entonces (1) es la forma grl. de la ec. lineal no homogénea.

• si $\alpha = 1$ (1) es lineal y homogénea con coeficiente $\tilde{a}(t) = a(t) - b(t)$.

Multiplicamos (1) por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)y^{-\alpha}a(t)\,y =$$

$$= b(t)\,(1-\alpha)\,y^{-\alpha}\,y^{\alpha}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'} + (1-\alpha)y^{-\alpha}a(t)\,y = b(t)(1-\alpha) \quad \cdots (2)$$

Si definimos $u = y^{1-\alpha}$ entonces

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

y (2) se convierte en una ecuación lineal no homogénea para u :

$$u' + \underbrace{(1-\alpha)a(t)}_{\tilde{a}(t)}\,u = \underbrace{(1-\alpha)\,b(t)}_{\tilde{b}(t)} \quad \cdots (3)$$

se puede resolver por variación de parámetros.