Lección 2.5 : Casos especiales: Riccati, inversión de y'.

IV. Ecuaciones tipo Riccati

Consideremos ecuaciones de primer orden, no lineales de la forma

$$y' = a(t)y + b(t)y^2 + f(t) \quad \ldots \quad (1)$$

donde $a, b, f \in C(I; \mathbb{R})$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

No hay método sistemático para resolver (1). Sin embargo si acaso conocemos una solución particular de (1)

$$y_p = y_p(t)$$

entonces el cambio de variables

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{u} + y_p \quad \ldots \quad (2)$$

transforma la ecuación no lineal (1) en una ecuación lineal para u.

En efecto,

$$uy - uy_p = 1$$

$$\Rightarrow \quad u'y + uy' - u'y_p - uy_p' = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-y_p)u' + (ay + by^2 + \cancel{f})u$$

y, y_p son soluciones de (1)

$$- (ay_p + by_p^2 + \cancel{f})u = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-y_p)u' + a(y-y_p)u + b(y^2 - y_p^2)u = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-y_p)\left[u' + au + b(y+y_p)u \right] = 0$$

Suponiendo $y \neq y_p$ obtenemos una ecuación lineal no homogénea para u: sustituyendo $y = \frac{1}{u} + y_p$

$$(3) \cdots \quad u' + (a + 2by_p)u + b = 0$$

(3) se puede resolver con variación de parámetros.

Nota: ecuaciones tipo Riccati (1) aparecen por ejemplo en modelos de crecimiento de poblaciones con influencia externa:

$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{p(a-bp)}_{\text{crecimiento logístico}} + \underbrace{f(t)}_{\text{influencia externa}}$$

Ejemplo: sea la ecuación

$$y' = 4t^2 y - t y^2 + 4 \quad \cdots (4)$$

Aquí $a(t) = 4t^2$, $b(t) = -t$, $f(t) = 4$.

Solución particular: por inspección, proponemos

$$y_p(t) = 4t.$$

En efecto, es solución de (4):

$$y_p' = 4$$

$$4t^2 y_p - t y_p^2 + 4 = 4t^2(4t) - t(4t)^2 + 4 = y_p'$$

Hacemos el cambio de variable

$$y = \frac{1}{u} + 4t$$

$$(3) \Rightarrow \quad u' + (a + 2b y_p) u + b = 0$$

$$\Rightarrow \quad u' + (4t^2 - 2t(4t)) u - t = 0$$

$$\Rightarrow \quad u' - 4t^2 u - t = 0$$

con $\tilde{a}(t) = -4t^2$, $\tilde{b}(t) = t$

De esta modo, por variación de parámetros:

$$e^{-\int^t \tilde{a}(t)\,dt} = e^{\frac{4}{3}t^3}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = e^{\frac{4}{3}t^3}\left[C + \int^t \underbrace{e^{-\frac{4}{3}\xi^3}\,\xi}_{}\, d\xi \right]$$

obtenemos una familia de soluciones:

$$y(t) = 4t + \frac{e^{-\frac{4}{3}t^3}}{\left[C + \int^t e^{-\frac{4}{3}\xi^3}\,\xi\, d\xi \right]}$$

(integral en forma implícita; solución explícita)

Ejercicio: Verificar que es una familia de soluciones $\forall C \in \mathbb{R}$. ¿Es completa?

I. Solución por inversión de y'.

Sea una ecuación general de primer-orden:

$$F(t, y, y') = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

con $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $\quad F = F(t, y, p)$.

En ocasiones no es posible representar a una familia de soluciones de (L) como

$$y = y_c(t), \qquad c \in \mathbb{R}$$

ó de una primitiva

$$\Phi(y(t), t) = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Idea: considerar a $y' = p$ como un parámetro. Por función implícita obtener $t = t(p)$, $y = y(p)$, y si es posible, eliminar p.

Hipótesis: $y' > 0 \quad \forall \; t \in I \subseteq \mathbb{R}$

ó $y' < 0 \quad \forall \; t \in I \subseteq \mathbb{R}$

Parametrizamos por $y' = p$:

$$\begin{aligned} y' &= p \\ t &= t(p) \\ y &= y(p) \end{aligned}$$

Dado que $y' > 0$, ó $y' < 0$ consideramos el mapeo

$$t \mapsto y'(t) = p(t)$$

Podemos invertir: $p \mapsto t(p)$.

Sustituyendo en (1) :

$$F(t(p), y(p), p) = 0 \quad \cdots (2)$$

Derivamos con respecto a p :

$$\rightarrow \quad F_t \frac{dt}{dp} + F_y \frac{dy}{dp} + F_p = 0$$

Por el teorema de la función inversa

$$\rightarrow \quad \frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dp} = p \frac{dt}{dp}$$

obtenemos así el sistema :

$$(3) \cdots \quad \begin{cases} F_t \dfrac{dt}{dp} + F_y \dfrac{dy}{dp} = -F_p \\ p \dfrac{dt}{dp} - \dfrac{dy}{dp} = 0 \end{cases}$$

Forma matricial :

$$\begin{bmatrix} F_t & F_y \\ p & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dt}{dp} \\ \dfrac{dy}{dp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invertimos la matriz :

$$\begin{bmatrix} \frac{dt}{dp} \\ \frac{dy}{dp} \end{bmatrix} = -(F_t + pF_y)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -F_y \\ -p & F_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= -\frac{F_p}{F_t + pF_y} \\ \frac{dy}{dp} &= -\frac{pF_p}{F_t + pF_y} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nota: No siempre se puede resolver (4).

caso particular: ecuación de la forma

$$t = g(y') \qquad \ldots \quad (5)$$

ecuación no lineal, de primer orden implícita.

Aquí $g \in C^1(\mathbb{R})$. En este caso:

$(5) \Leftrightarrow F(t, y, y') = 0$ con

$$F(t, y, p) = t - g(p)$$

$$\therefore \quad F_t = 1, \quad F_y = 0, \quad F_p = -g'(p)$$

Sustituyendo en (4):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= g'(p) \\ \frac{dy}{dp} &= p\,g'(p) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

El sistema se puede integrar directamente:

$$(7) \quad \begin{cases} t(p) = g(p) + C_1 \\ y(p) = p\,g(p) - \int^p g(p)\,dp + C_2 \end{cases}$$

C_j const., $j=1,2$

En efecto,

$$\frac{dt}{dp} = g'(p),$$

$$\frac{dy}{dp} = p\,g'(p) + \cancel{g(p)} - \cancel{g(p)}$$

Si es posible, en (7) se elimina p (invirtiendo $t(p) = g(p) + C_1$ $\Rightarrow$ $p = p(t)$ y se sustituye

$$y(t) = y(p(t)).)$$

Ejemplo (del caso particular):

Sea

$$t\left(1 + (y')^2\right) = 1 \quad \ldots (8)$$

Aquí $t\,(0,1]$, $1+(y')^2 = \frac{1}{t} \geq 1$

sustituir $p = y'$:

$$t(p) = \frac{1}{1+p^2}, \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{-2p}{(1+p^2)^2}$$

$g(p) = \frac{1}{1+p^2}$

$$\Rightarrow y(p) = p\,g(p) - \int^p g(p) + C$$

$$= \frac{p}{1+p^2} - \int^p \frac{dp}{1+p^2} + C$$

$$= \frac{p}{1+p^2} - \operatorname{Arc\,tan} p + C$$

$$t = \frac{1}{1+p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \geq 0$$

si $t \in (0,1]$

$$\Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{1-t}{t}}$$

familia de soluciones :

$$y(t) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-t}{t}}}{1+\left(\frac{1-t}{t}\right)} - \operatorname{Arc\,tan}\left[\pm\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right] + C, \qquad t \in (0,1].$$