Lección 2.6 : Casos especiales (continuación).

I. sustitución por inversión de y'.

caso particular (i) : $t = g(y')$

caso particular (ii) : la ecuación de <u>clairaut</u>.

Sea la ecuación

$$y = ty' + g(y') \qquad \cdots \quad (1)$$

$t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. En este caso tenemos

$$F(t,y,p) = y - tp - g(p)$$

Éste es un caso donde <u>no</u> podemos resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= -\frac{F_p}{F_t + pF_y} \\ \frac{dy}{dp} &= -\frac{pF_p}{F_t + pF_y} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en virtud de que $F_t + pF_y = -p + p = 0$.

Sin embargo, el método de inversión por y' puede ser útil. (Tomar a $p = y'$ como parámetro.)

Notamos inmetiatamente que haciendo $p = y' = C$ constante, obtenemos una primitiva (famila de soluciones):

$$y(t) = Ct + g(C) \quad \cdots (3)$$

$\forall C \in \mathbb{R}$, constant. La familia (3) se conoce como solución general de la ecuación de clairaut (1).

Sin embargo, en general (3) no es una familia completa de soluciones. Pueden existir soluciones <u>singulares</u>.

Derivamos (1):

$$\cancel{y'} = ty'' + \cancel{y'} + g'(y')y''$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(t + g'(y'))}_{} \underbrace{y''}_{} = 0$$

Suponiendo que al menos $y \in C^2(I; \mathbb{R})$ tenemos 2 casos:

(a) $y''(t) = 0$

(b) $t + g'(y'(t)) = 0$

Notamos que $(a) \Rightarrow \quad y = Ct + g(C)$

solución general (3)

El caso (b) determina a una solución singular: parametrizamos por $y' = p$:

$$(b) \Rightarrow \quad t = -g'(y'(t)) = -g'(p)$$

$$(1) \Rightarrow \quad y = tp + g(p)$$

$$= -pg'(p) + g(p)$$

$\Rightarrow$ solución en forma paramétrica

$$(4) \begin{cases} t = t(p) := -g'(p) \\ y = y(p) := g(p) - pg'(p) \end{cases}$$

(4) solución singular de la ecuación de Clairaut (forma paramétrica).

Ejemplos:

1. Sea la ecuación

$$y = ty' + (y')^2 \qquad \cdots \quad (5)$$

Ec. no lineal de 1er. orden tipo Clairaut con $g(p) = p^2$.

La solución general de (5) es

(6) $\cdots$ $$y(t) = Ct + C^2,$$ con $C \in \mathbb{R}$ constante

Solución singular: $g'(p) = 2p$.

Entonces el sistema (4) es:

$$t = -g'(p) = -2p$$

$$y = g(p) - pg'(p) = -p^2$$

En este caso podemos resolver para $y = y(t)$: $p = -t/2 \Rightarrow y(t) = -\frac{t^2}{4}$

Solución singular: $$y(t) = -\frac{t^2}{4} \quad \cdots (7)$$

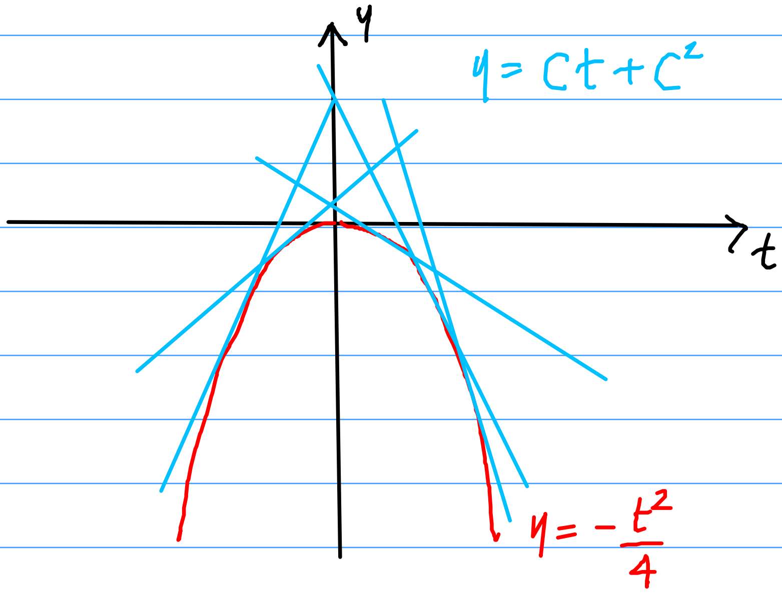
Claramente (7) no es de la familia (6).
Es solución ya que

$$ty' + (y')^2 = t\left(-\frac{t}{2}\right) + \left(-\frac{t}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4}$$

$$= -\frac{t^2}{4} = y \quad ✓$$

Geométricamente (7) es la envolvente de la familia (6).



Ejercicio: demostrar que la solución singular de la ecuación de Clairaut es la envolvente de la solución general.

2. Sea la ecuación de clairaut

$$(8) \ldots \quad y = ty' + \log y', \qquad y' > 0$$

Aquí $g(p) = \log p, \qquad p > 0.$

La solución general es:

$$(9) \ldots \quad y(t) = ct + \log c, \qquad c \in \mathbb{R}, \ c > 0$$

solución singular: $\quad g(p) = \log p$

$$\Rightarrow \ g'(p) = \frac{1}{p}, \qquad p > 0$$

Sustituyendo en (4):

$$\begin{cases} t(p) = -\dfrac{1}{p} \\ \\ y(p) = g(p) - p g'(p) \\ \quad\quad = \log p - 1 \qquad \forall\, p>0 \end{cases}$$

como $p = -\dfrac{1}{t} > 0$ entonces el dominio es $t<0$.

La solución singular es:

(10) .... $y(t) = \log\left(-\dfrac{1}{t}\right) - 1, \quad t<0$

caso particular (iii): ecuaciones tipo d'Alembert

Ecuaciones de la forma:

$$y = t f(y') + g(y') \qquad \dots \quad (1)$$

con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in C^1(\mathbb{R})$.

Vamos a suponer que

$$f(p) \not\equiv p \qquad \dots \quad (2)$$

(caso contrario: Clairaut.)

Parametrizamos por $y' = p$:

$$y = t\,f(p) + g(p) \qquad \cdots \quad (3)$$

Derivamos (3) con respecto a p :

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dt}{dp} f(p) + t f'(p) + g'(p)$$

Por otro lado $\quad \dfrac{dy}{dp} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dp} = p\dfrac{dt}{dp}$

Sustituyendo, obtenemos una ecuación para $t = t(p)$:

$$(4) \cdots \quad \underbrace{(f(p) - p)}_{\neq 0} \frac{dt}{dp} + t f'(p) = -g'(p)$$

Se puede resolver por variación de parámetros.

Resolver (4) $\Rightarrow$ $t = t(p)$

$y = y(p) = t(p) f(p) + g(p)$

solución general de (1) en forma paramétrica.

¿Qué pasa si $f(p) = p$ para ciertos valores de p ?

Puntos fijos de f : $f(p_*) = p_*$.

Éstos determinan las soluciones singulares de (1) :

$$y = f(p_*)t + g(p_*)$$

$$= p_* t + g(p_*)$$

(sol. gral. de Clairaut)

Ejemplos :

1. Sea la ecuación

$$y = (1+t)(y')^2 \qquad \dots (5)$$

Ecuación nolineal tipo d'Alembert con

$$f(p) = p^2, \quad g(p) = p^2.$$

No es tipo Clairaut : $f(p) \not\equiv p$.

Soluciones singulares : $f(p) = p^2 = p$

$$\Leftrightarrow \quad p(p-1) = 0.$$

Puntos fijos $p_* = 0, \quad p_* = 1$.

Las soluciones singulares son:

$$\begin{cases} y(t) \equiv 0 \\ y(t) = f(1)t + g(1) \\ \quad\;\; = t+1 \end{cases}$$

Sol. general:

Sustituyendo en (4):

$$(f(p)-p)\frac{dt}{dp} + t f'(p) = -g'(p)$$

$$(=) \quad (p^2-p)\frac{dt}{dp} + t(2p) = -2p$$

$$(=) \quad (p-1)\frac{dt}{dp} + 2t = -2$$

Sol. particular: $t(p) = -1$.

Sol. general de la homogénea:

$$t(p) = \frac{C}{(p-1)^2}$$

En efecto,

$$(p-1)\frac{dt}{dp} + 2t = (p-1)\left[\frac{-2C}{(p-1)^3}\right] + \frac{2C}{(p-1)^2}$$

$$= 0$$

La solución es:

$$(6) \cdots \quad t(p) = \frac{C}{(p-1)^2} - 1$$

$C \in \mathbb{R}$ constante

sustituyendo:

$$y(p) = (1+t)\, p^2$$

$$= \frac{Cp^2}{(p-1)^2}$$

solución en forma paramétrica:

$$(7) \cdots \begin{cases} t(p) = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1 \\[2ex] y(p) = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2} \end{cases} \qquad C \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

resolviendo para p:

$$(p-1)^2 = \frac{C}{t+1} \geq 0$$

Si $C>0$ entonces el dominio es $t>-1$

Si $C<0$ " " es $t<-1$

Si $C=0$ entonces la solución es la solución singular $y \equiv 0$.

Así, $\quad p = \frac{dy}{dt} = 1 \pm \sqrt{\frac{C}{t+1}}$,

como $\quad y = (1+t)p^2$ tenemos

(8) $\cdots \quad y(t) = 1+t \pm 2\sqrt{C(1+t)} + C$

con $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$, se define en $t > -1$ si $C > 0$, y en $t < -1$ si $C < 0$.