Lección 2.8 : Aplicaciones: braquistócrona (continuación).

Funcional T de la forma:

$$T[y] = \int_a^b F(y(x), y'(x))\, dx \qquad \cdots \quad (1)$$

donde $y \in C^1([a,b])$, $F = F(y,p)$, $F \in C^2$. Tomaremos

$$h \in C_0^\infty([a,b]) \qquad \cdots \quad (2)$$

calculamos, para $s \in \mathbb{R}$,

$$T[y+sh] - T[y] =$$

$$= \int_a^b \left(F(y+sh, y'+sh') - F(y,y') \right) dx$$

$$= \int_a^b \Big[sh F_y(y,y') + sh' F_p(y,y') + \frac{s^2 h^2}{2} F_{yy}(y,y') + \ldots \Big]\, dx$$

Taylor de $F \in C^2$

$$= s \int_a^b \left[h F_y(y,y') + h' F_p(y,y') \right] dx + O(s^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}\left(T[y+sh] - T[y] \right) = \int_a^b \left[h F_y(y,y') + h' F_p(y,y') \right] dx + O(s).$$

Tomando $\lim_{s \to 0^+}$ e igualando a cero:

$$(3) \ldots \int_a^b \left[h F_y(y, y') + h' F_p(y, y') \right] dx = 0$$

$$\forall h \in C_0^\infty([a,b])$$

Lema 1 Sea $\alpha = \alpha(x)$, continua en $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, tal que

$$\int_a^b \alpha(x) h'(x)\, dx = 0$$

$\forall h \in C^1([a,b]) \cap C_0([a,b])$ (es decir, h es continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $h(a) = h(b) = 0$).

Entonces, $\alpha = \alpha(x)$ es constante.

Demostración Sea

$$C := \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(x)\, dx.$$ (promedio de α en $[a,b]$)

Definimos

$$h(x) := \int_a^x (\alpha(\xi) - C)\, d\xi.$$

Por definición, $h(a) = h(b) = 0$.

Además $h \in C^1([a,b])$.

$h'(x) = \alpha(x) - C$.

Por lo tanto :

$$0 \underset{\text{Hipótesis}}{=} \int_a^b \alpha(x)\, h'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \alpha(x)(\alpha(x) - C)\, dx$$

$$= \int_a^b (\alpha(x) - C)^2\, dx + \int_a^b C(\alpha(x) - C)\, dx$$

$$= \int_a^b (\alpha(x) - C)^2\, dx + C\underbrace{h(b)}_{=0}$$

con $\alpha(x) - C$ continua.

$$\Rightarrow \quad \alpha(x) \equiv C \quad \text{en } [a,b]$$

$\square$

<u>Lema 2</u> (Dubois - Reymond)

Sean $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ continuas en $[a,b]$ (compacto, $a \neq b$) tales que

$$\int_a^b \left[\alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x)\right] dx = 0$$

$\forall\ h \in C^1([a,b]) \cap C_0([a,b])$ $(h(a) = h(b) = 0)$.

Entonces, $\beta \in C^1([a,b])$ y $\beta'(x) = \alpha(x)$.

Demostración Definimos

$$A(x) := \int_a^x \alpha(\xi)\, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad A'(x) = \alpha(x).$$

Sea $h \in C^1([a,b]) \cap C_0([a,b])$. Así,

$$\int_a^b \alpha(x) h(x)\, dx = \int_a^b A'(x) h(x)\, dx$$

$$= \left(A(x) h(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b A(x) h'(x)\, dx$$

int. por partes

$$= - \int_a^b A(x) h'(x)\, dx$$

$h(a) = h(b) = 0.$

Por hipótesis,

$$0 = \int_a^b \left[\alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x)\right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\beta(x) - A(x)\right] h'(x)\, dx$$

Por lema 1 :

$$\beta(x) - A(x) = \text{constante}.$$

Así,

$$\begin{cases} \beta'(x) = A'(x) = \alpha(x) \\ \beta \in C^1([a,b]) \end{cases}$$

$\square$

Aplicando Dubois-Reymond a (3):

$$0 = \int_a^b \left[h \underbrace{F_y(y,y')}_{\alpha(x)} + h' \underbrace{F_p(y,y')}_{\beta(x)} \right] dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\Big(F_p\big(y(x), y'(x)\big)\Big) = F_y\big(y(x), y'(x)\big) \quad \cdots (4)}$$

Ecuación de Euler-Lagrange.

condición necesaria para que $y = y(x)$ sea un "punto" crítico del funcional $T[y]$.

Braquistócrona:

$$T[y] = \int_{0}^{a} F(y(x), y'(x))\, dx$$

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx$$

$$F(y,p) := \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$\Rightarrow F_y = -\frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^{1/2}}{(2gy)^{3/2}} \cdot 2g = -g\,\frac{(1+p^2)^{1/2}}{(2gy)^{1/2}}$$

$$F_p = \frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^{-1/2}}{(2gy)^{1/2}} \cdot 2p = \frac{p}{(1+p^2)^{1/2}(2gy)^{1/2}}$$

sustituyendo en (4):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\left[2gy\left(1+(y')^2\right)\right]^{1/2}}\right) = -g\,\frac{\left(1+(y')^2\right)^{1/2}}{(2gy)^{3/2}}$$

Multiplicando por $F_p(y,y') = \dfrac{y'}{\left[2gy\left(1+(y')^2\right)\right]^{1/2}}$

obtenemos:

$$0 = F_p(y,y')\,\frac{d}{dx}\left(F_p(y,y')\right) + $$

$$+\ \frac{g\left(1+(y')^2\right)^{1/2}\,y'}{(2gy)^{1/2}\left(1+(y')^2\right)^{1/2}(2gy)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\left[F_p(y,y')^2\right] + \frac{y'}{4gy^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F_p(y,y')^2\right) = \frac{1}{2g}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow F_p(y,y')^2 - \frac{1}{2gy} = C, \quad \text{constante.}$$

$$\Rightarrow \frac{(y')^2}{2gy\left(1+(y')^2\right)} - \frac{1}{2gy} = C$$

$$\Rightarrow y\left(1+(y')^2\right) = k^2 \geq 0, \quad \text{constante.}$$

≥ 0

Ecuación no lineal de 1er. orden

$$y\left(1+(y')^2\right) = k^2 \quad \ldots \quad (5)$$

Tipo d'Alembert : $y = x f(y') + g(y')$

con $f(p) \equiv 0$, $g(p) = \dfrac{k^2}{1+p^2}$

En este caso la ecuación para

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dy'}$$

es

$$(f(p)-p)\frac{dx}{dp} + x f'(p) = -g'(p)$$

$$\Rightarrow \quad -p\frac{dx}{dp} = +\frac{2k^2 p}{(1+p^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2k^2}{(1+p^2)^2}$$

Haciendo $p = \cot\frac{\theta}{2}$ obtenemos la solución en forma paramétrica:

$$(6)\ldots\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{k^2}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = \dfrac{k^2}{2}(1-\cos\theta) \end{cases}$$

Cicloide (Isaac Newton)

Ejercicio: Calcular el tiempo $T[y]$ para la cicloide (6).

Compararla con otras curvas: recta, círculo.

(La cicloide minimiza el tiempo.)