Lección 3.1 : Ecuaciones de sgundo orden.

Sección 3 : Ecuaciones de 2o. orden

3.1 Ecuaciones lineales homogéneas.

Forma general :

$$F(t, y, y', y'') = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, I abierto, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $y'' = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$, $y \in C^2(I; \mathbb{R})$.

(1) es explícita si

$$F(t, y, y', y'') = y'' - G(t, y, y') \qquad \ldots (2).$$

Ecuaciones lineales homogéneas de la forma :

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = 0 \qquad \ldots (3)$$

donde $p, q \in C(I; \mathbb{R})$. Definimos el operador diferencial :

$$(4) \ldots \begin{cases} Ly := y'' + p(t) y' + q(t) y \\ L : C^2(I; \mathbb{R}) \longrightarrow C(I; \mathbb{R}) \end{cases}$$

El problema de Cauchy asociado a (3) es:

$$\left.\begin{array}{r} Ly = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

con $t_0 \in I$ fijo, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ dados.

<u>Definición</u> Un operador $L : X \longrightarrow Y$, con X, Y espacios vectoriales definidos en el mismo campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, se denomina lineal si

$$L(\underbrace{\alpha y + \beta w}) = \alpha Ly + \beta Lw,$$

$\forall\, y, w \in X$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

<u>Lema 1</u> El operador diferencial L definido en (4) es lineal.

<u>Demostración</u>: Si $y, w \in C^2(I;\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha y + \beta w \in C^2(I;\mathbb{R})$ y

$$L(\alpha y + \beta w) = (\alpha y + \beta w)'' + p(t)(\alpha y + \beta w)' + $$

$$+ q(t)(\alpha y + \beta w)$$

$$= \alpha[y'' + p(t)y' + q(t)y] +$$

$$+ \beta[w'' + p(t)w' + q(t)w] = \alpha Ly + \beta Lw$$

$\square$

Corolario Si $y, w \in C^2(I; \mathbb{R})$ son soluciones de (3) ($Ly = Lw = 0$) entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha y + \beta w$ es solución de (3).

Definición Un conjunto de n funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_j \in C(I; \mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto linealmente independiente si para cualesquiera constantes $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Teorema (existencia y unicidad)

Sean $p, q \in C(I; \mathbb{R})$, continuas en $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Entonces para cualesquiera $t_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ dados existe una única solución $y = y(t)$ al problema de Cauchy (5). En particular, cualquier solución $y = y(t)$ de $Ly = 0$ que satisfaga $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, es la solución idénticamente cero, $y(t) \equiv 0$ $\forall t \in I$.

Demostración: Pendiente (sección 4; iteraciones de Picard). $\square$

Corolario: Tomando $C_1 = y_0$, $C_2 = y_1$, arbitrarias, obtenemos $y = y(t, C_1, C_2)$ una familia biparamétrica completa de la ecuación (3).

Teorema 2 Sean $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, dos soluciones de $Ly = 0$ en $I \subseteq \mathbb{R}$, tales que:

(i) $y_j \in C^2(I; \mathbb{R})$

(ii) $y_1(t) y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

Entonces la solución general (familia completa) de la ecuación homogénea $Ly = 0$ es:

(6) .- $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$, $t \in I$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, constantes arbitrarias.

Demostración

Sea $\hat{y} = \hat{y}(t)$, $\hat{y} \in C^2(I; \mathbb{R})$, solución de $Ly = 0$. Definimos:

$$\hat{y}_0 := \hat{y}(t_0), \quad \hat{y}_1 := \hat{y}'(t_0)$$

para cualquier $t_0 \in I$ arbitrario.

Suponiendo que $\hat{y}$ es de la forma (b) (condición necesaria) entonces C_1, C_2 deben satisfacer

$$\hat{y}(t_0) = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) = \hat{y}_0$$

$$\hat{y}'(t_0) = C_1 y_1'(t_0) + C_2 y_2'(t_0) = \hat{y}_1$$

es decir, $A_0 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{pmatrix}$

con $A_0 = \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}$.

Por la hipótesis (ii):

$$W_0 = \det A_0 = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)$$

$$\neq 0$$

Así, A_0 es invertible y por ende:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A_0^{-1} \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{W_0} \begin{pmatrix} y_2'(t_0) & -y_2(t_0) \\ -y_1'(t_0) & y_1(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = W_0^{-1}\left[y_2'(t_0)\hat{y}_0 - y_2(t_0)\hat{y}_1 \right]$$

$$C_2 = W_0^{-1}\left[-y_1'(t_0)\hat{y}_0 + y_1(t_0)\hat{y}_1 \right]$$

c_1, c_2 constantes. Por el lema (L lineal) sabemos que

$$y(t) := c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad \cdots (7)$$

es solución de $Ly = 0$. Además

$$y(t_0) = \underbrace{\hat{y}(t_0)}_{= \hat{y}_0}, \quad y'(t_0) = \underbrace{\hat{y}'(t_0)}_{= \hat{y}_1}$$

Por el teorema de $\exists!$ $y(t) = \hat{y}(t)$.

Como $\hat{y}_0, \hat{y}_1$ son arbitrarios, concluimos que toda solución de $Ly = 0$ es de la forma (6)

$\square$

<u>Definición</u> La función

$$(8) \cdots \quad W(t) = W[y_1, y_2](t)$$
$$= y_1(t) y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t), \quad t \in I$$

se llama el Wronskiano de y_1, y_2.

Lema 2 Sean $y_1, y_2 \in C^2(I;\mathbb{R})$ soluciones de $Ly = 0$. Entonces el Wronskiano $W(t) = W[y_2, y_1](t)$ satisface la ecuación:

$$(9) \ldots \qquad W'(t) + p(t)W(t) = 0, \qquad \forall t \in I.$$

Demostración:

Por definición de W:

$$W'(t) = \frac{d}{dt}\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right)$$

$$= y_1 y_2'' + \cancel{y_1' y_2'} - \cancel{y_1' y_2'} - y_1'' y_2$$

$Ly_1 = Ly_2 = 0$

$$= y_1\left(-p y_2' - q y_2\right) - y_2\left(-p y_1' - q y_1\right)$$

$$= -p\underbrace{\left[y_1 y_2' - y_2 y_1'\right]}_{W} - \cancel{q y_1 y_2} + \cancel{q y_1 y_2}$$

$$= -pW \qquad \square$$

Corolario 1 Para cualesquiera $y_1, y_2 \in C^2(I;\mathbb{R})$ soluciones de $Ly = 0$ se tiene que

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = W_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)$$

$\forall t \in I$, $t_0 \in I$ arbitrario, $W(t_0) = W_0$.

Corolario 2 Sea $t_0 \in I$ arbitrario.
Entonces:

(a) Si $W[y_1, y_2](t_0) = W(t_0) = 0$ entonces $W(t) \equiv 0 \quad \forall\, t \in I$.

(b) Si $W[y_1, y_2](t_0) = W(t_0) \neq 0$ entonces $W(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I$.

Lema 3 Sean $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{R})$ soluciones de $Ly = 0$. Entonces:

(a) $W[y_1, y_2] = 0$ si y sólo si $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

(b) $W[y_1, y_2] \neq 0$ si y sólo si $\{y_1, y_2\}$ es linealmente independiente.

Demostración (a) Supongamos que

$$W(t_0) = W[y_1, y_2](t_0) = 0$$

para cierto $t_0 \in I$. Entonces el sistema de ecuaciones

$$(10)\quad \begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución no trivial, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$. En este caso definimos

$$y(t) := c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad t \in I.$$

Claramente, $\begin{cases} Ly = 0. \\ y(t_0) = 0, \; y'(t_0) = 0. \end{cases}$

Por el teorema de $\exists!$,

$$y(t) \equiv 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

$\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ es linealmente dependiente.

Inversamente, si $\{y_1, y_2\}$ es linealmente dependiente entonces $\exists$ $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ tales que (10) tiene una solución no trivial para cada $t_0 \in I$ arbitrario. $\Rightarrow$ $W[y_1, y_2](t) \equiv 0 \;\; \forall\, t \in I$.

(b) Por contradicción:

(a): $\{y_1, y_2\}$ l.d. $\Leftrightarrow$ $W[y_1, y_2] \equiv 0$.

$\therefore$ conclusión $\square$