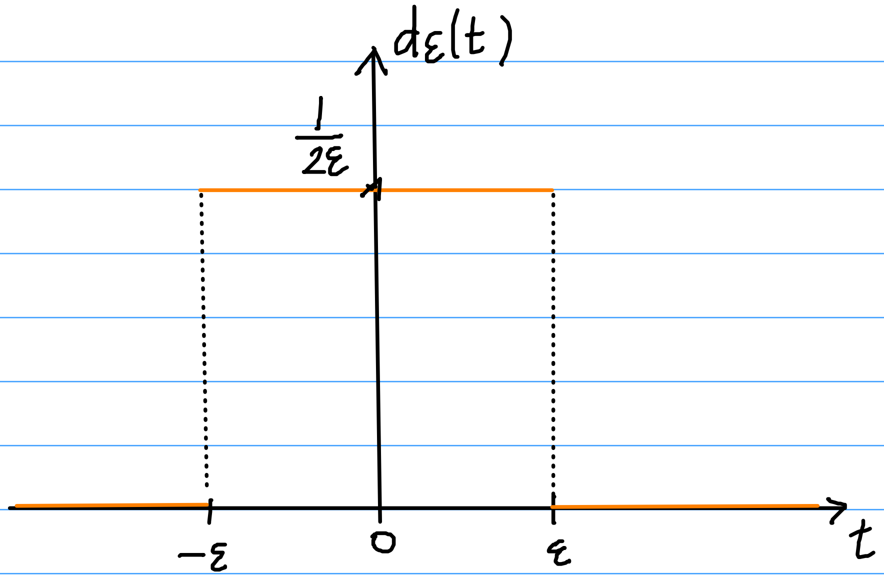
Lección 3.11 : Delta de Dirac. Convolución.

Aplicaciones.

Delta de Dirac Sea la función:

$$d_\varepsilon(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0, & t \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

$\forall\, \varepsilon > 0$



Función discontinua, constante por pedazos

Notamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt = 1$$

$\forall\, \varepsilon > 0.$

La delta de Dirac centrada en $t=0$ se "define" (no rigurosamente), como

$$\delta(t) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} d_\varepsilon(t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \cdots (2)$$

Además $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t)\, dt$

$$= 1.$$

La delta de Dirac centrada en $t_0 \in \mathbb{R}$ se define como

$$\delta_{t_0}(t) := \delta(t - t_0)$$

Dado que $\mathcal{L}(d_\varepsilon)(s)$ existe $\forall \varepsilon > 0$ "definimos" para todo $t_0 \geq 0$

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{L}(d_\varepsilon(t - t_0))(s)$$

$s > t_0$

(no riguroso).

Para cada $\varepsilon > 0$ tenemos :

$$\mathcal{L}(d_\varepsilon(t-t_0))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d_\varepsilon(t-t_0)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon s}\left[e^{-s(t_0-\varepsilon)} - e^{-s(t_0+\varepsilon)}\right]$$

$$= \frac{\sinh(s\varepsilon)}{s\varepsilon}\cdot e^{-st_0}$$

Por L'Hôpital :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sinh(s\varepsilon)}{s\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\cancel{s}\cosh(s\varepsilon)}{\cancel{s}} = 1$$

Por lo tanto :

$$(3)\ldots \begin{cases} \mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-st_0}, & \forall t_0 \geq 0 \\ \mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1 \end{cases}$$

De manera no rigurosa :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t-t_0) H(t)\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\, dt$$

teo. valor medio integrales

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\left[(t_0+\varepsilon-(t_0-\varepsilon)) f(\theta(t_0-\varepsilon)+(1-\theta)(t_0+\varepsilon))\right]$$

para cierto $\theta \in (0,1)$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t_0 + (1-2\theta)\varepsilon)$$

si f es continua entonces

$$(4) \cdots \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt}_{\langle \delta_{t_0}, f \rangle \; := \; f(t_0)} = f(t_0)$$

Nota: (4) es la definición de δ en sentido distribucional.

Aplicación: consideremos el problema

$$(5) \cdots \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Tomamos $\mathcal{L}$:

$$Y(s) := (\mathcal{L}y)(s)$$

$$\Rightarrow \quad s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2sY(s)$$

$$- 2\underbrace{y(0)}_{=1} + 2Y(s) = e^{-s\pi}$$

Despejamos :

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}$$

$$= \mathcal{L}[e^{-t}\cos t](s) + \mathcal{L}(e^{-t}\sin t)(s) +$$

$$+ e^{-\pi s}\mathcal{L}(e^{-t}\sin t)(s)$$

$$= \mathcal{L}\Big(e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t +$$

$$+ H_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\Big)$$

La solución de (S) es :

$$y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) +$$

$$+ H_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

Convolución: Sean $f=f(t)$, $g=g(t)$ funciones integrables en $t\in(0,\infty)$. Se define la convolución de f con g mediante :

$$h(t) := (f*g)(t) := \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)\,d\xi$$

Propiedades de la convolución :

(a) $f*g = g*f$

(b) $f*(g_1 + g_2) = f*g_1 + f*g_2$

(c) $(f*g)*h = f*(g*h)$

(d) $f*0 = 0*f = 0$

(e) $f*1 \neq f$ (contraejemplo : $f(t) = \sin t$)

(f) $f*f$ puede ser negativa (contraejemplo : $f(t) = \sin t$)

Demostración : ejercicio. $\square$

<u>Lema 1</u> Sean f, g de orden exponencial e integrables en $(0, \infty)$. Sean

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s), \quad G(s) = (\mathcal{L}g)(s)$$

y existen para $s > a \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = F(s)\,G(s), \quad \forall s > a. \quad \ldots (7)$$

<u>Demostración</u> Por definición de $\mathcal{L}$:

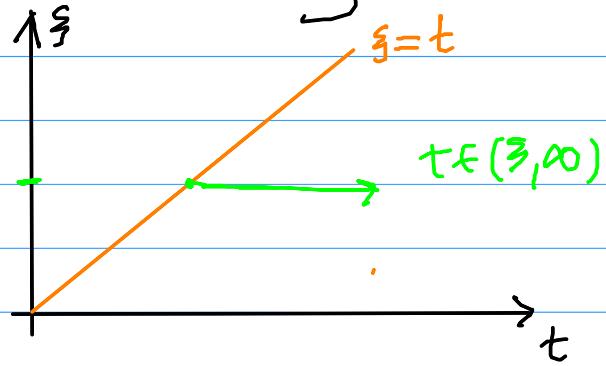
$$F(s)G(s) = \left[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau\right]\left[\int_0^\infty e^{-s\xi} g(\xi)\, d\xi\right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) e^{-s\xi} g(\xi)\, d\tau\, d\xi$$

$$= \int_0^\infty g(\xi)\left[\int_0^\infty e^{-s(\tau+\xi)} f(\tau)\, d\tau\right] d\xi$$

$\tau = t-\xi$
$$= \int_0^\infty g(\xi) \int_\xi^\infty e^{-st} f(t-\xi)\, dt\, d\xi$$

La región de integración es:



$$\Rightarrow F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_\xi^\infty e^{-st} f(t-\xi) g(\xi)\, dt\, d\xi$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\xi) g(\xi)\, d\xi\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\int_0^t f(t-\xi) g(\xi)\, d\xi}_{(f*g)(t)}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} (f*g)(t)\, dt$$

$$= \mathcal{L}(f*g)(s)$$

$\square$

Ejemplos:

(A) Hallar la función $h = h(t)$ tal que

$$(\mathcal{L}h)(s) = H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}, \quad a>0$$

Sabemos que $F(s) := \mathcal{L}(\sin at)(s)$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$G(s) := \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore \quad H(s) = F(s)G(s)$$

$$= \mathcal{L}(f*g)(s)$$

lema 1

con $f(t) = \sin at, \quad g(t) = t$

Calculamos

$$(f*g)(t) = \int_0^t (t-\xi)\sin a\xi \, d\xi$$

$$= -\int_0^t \left(\frac{t-\xi}{a}\right)\frac{d}{d\xi}(\cos a\xi)\, d\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{a} \cos a\xi \cdot (t-\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=t} +$$

$$- \int_0^t \frac{\cos a\xi}{a} \, d\xi$$

$$= \frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2} =: h(t)$$

La función buscada es $h(t)$.

Comprobación :

$$\frac{a}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{a(s^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{a} \mathcal{L}(t)(s) - \frac{1}{a^2} \mathcal{L}(\sin at)(s)$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2} \right)(s),$$