Lección 3.12 : Ejemplos. Soluciones en series de potencias.

Ejemplos :

(A) Hallar la solución de

$$\left.\begin{aligned} y'' + 4y &= g(t) \\ y(0) &= \underline{3} \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$g = g(t)$ función arbitraria con

$G(s) = (\mathcal{L}g)(s)$ existe.

Transformando (1) : $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$

$$\therefore \quad s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=3} - \underbrace{y'(0)}_{=-1} + 4Y(s) = G(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

$$= 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{s^2+4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{s^2+4}\right)G(s)$$

$$= 3\,\mathcal{L}(\cos 2t)(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)(s) +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}(\sin 2t)(s)(\mathcal{L}g)(s)}_{=\ \mathcal{L}(\sin 2t * g)(s)}$$

La solución es:

$$y(t) = \underbrace{3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t}_{\text{solución homogénea}} + $$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t \sin(2(t-\xi))\, g(\xi)\, d\xi}_{\text{solución particular de la no homogénea.}}$$

(B) Hallar la solución de

$$\left.\begin{array}{l} ty'' + 2y' + ty = 0 \\ y(0+) = 1 \\ y(\pi) = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$y(0+) = y_0$

$y(\pi) = y_1$

donde $y(0+) := \lim_{t\to 0^+} y(t)$.

Aplicamos $\mathcal{L}$:

$$0 = \mathcal{L}(ty'')(s) + 2\mathcal{L}(y')(s) + \mathcal{L}(ty)(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}y'')(s) + 2\left(s(\mathcal{L}y)(s) - y(0)\right) +$$

$$- \frac{d}{ds}(\mathcal{L}y)(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] +$$

$$+ 2\left[sY(s) - y(0)\right] - Y'(s)$$

$y(0) = y(0+) = 1$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\cancel{2sY(s)} - s^2 Y'(s) + 1 + \cancel{2sY(s)} - 2 - Y'(s)$$

$$\Rightarrow \quad (1+s^2)\,Y'(s) = -1$$

$$\Rightarrow \quad Y'(s) = -\frac{1}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = C - \text{Arc}\tan s.$$

<u>Proposición</u> f continua y de orden exponencial con $K>0$, $a \in \mathbb{R}$ entonces $(\mathcal{L}f)(s)$ existe $\forall\, s>a$ y

$$\lim_{s\to\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0.$$

<u>Dem.</u> La primera parte ya se probó:

$$|(\mathcal{L}f)(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \right| \le \frac{K}{s-a} \quad \forall\, s>a.$$

Si tomamos $s\to\infty$ obtenemos

$$\lim_{s\to\infty} (\mathcal{L}f)(s) = 0$$

$\square$

Dado que $Y(s) \to 0$ si $s\to\infty$ obtenemos:

$$0 = C - \operatorname{Arc\,tan}(\infty) = C - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} s$$

Sabemos que :

- si $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ $\exists$ entonces
$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}f)(\xi)\, d\xi$$

- $$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}(\sin t)(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_s^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} s$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s)$$

$\Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ es la solución de (2).

observación : en este ejemplo obtuvimos $y(\pi) = 0$ de manera automática.
La teoría predice que $\exists$ 2 soluciones

linealmente independientes de la ecuación diferencial. La otra solución $\frac{\cos t}{t}$ no tiene transformada de Laplace.

(ejercicio).

Método de series de potencias

Breve repaso:

(a) Serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$ converge en $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} a_n (t-t_0)^n \quad \text{existe.}$$

Converge absolutamente ssi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |t-t_0|^n \; \exists$

convergencia absoluta $\Rightarrow$ convergencia
$\not\Leftarrow$

(b) Test de la razón: si $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
sea $L := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

La serie converge en t si $|t-t_0| < \frac{1}{L}$
" diverge " " $|t-t_0| > \frac{1}{L}$

El criterio no decide si $|t-t_0| = \frac{1}{L}$.

(c) Si la serie converge absolutamente para $|t-t_0| < R$, y diverge para $|t-t_0| > R$, $R>0$ es el radio de convergencia de la serie.

(d) Si $f \in C^\infty$, $a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}$

serie = serie de Taylor al rededor de t_0.

f es analítica si $\exists$ $R>0$ tal que la serie de Taylor es absolutamente convergente en $|t-t_0|<R$.

(e) Las series se pueden integrar / diferenciar dentro del mismo radio de convergencia.

Consideremos la ecuación homogénea:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad \dots (1)$$

con $a, b, c \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ abierto.

Definición (i) Un punto $t_0 \in I$ se denomina ordinario si $a(t_0) \neq 0$.

(ii) Si $a(t_0) = 0$ entonces $t_0 \in I$ se llama singular.

(iii) Si para $t_0 \in I$, singular, las funciones

$$(t-t_0)\frac{b(t)}{a(t)}, \quad y \quad (t-t_0)^2\frac{c(t)}{a(t)}$$

tienen series de potencias convergentes en $|t-t_0| < R$ con un cierto radio $R>0$, entonces el punto se llama singular regular. En otro caso, se llama irregular.

Observación: Si $t_0 \in I$ es ordinario entonces por continuidad

$$a(t) \neq 0 \quad \text{para} \quad t \in J_\delta = \{ |t-t_0| < \delta \}$$
$$\delta > 0$$

Así, (1) $\Rightarrow$ $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$

$$p(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, \quad q(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

$p, q \in C(J_\delta)$. Nos concentraremos en el caso $t_0 \in I$ singular.

Ejemplos:

(A) $t^2 y'' - 2y = 0$. Aquí $a(t) = t^2$

$b(t) \equiv 0$

$c(t) = -2$

$a, b, c \in C^\infty \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$t_0 = 0$ es el único punto singular.

Las funciones:

- $t \dfrac{b(t)}{a(t)} \equiv 0$
- $\dfrac{t^2 c(t)}{a(t)} \equiv -2$

claramente tienen series de Taylor convergentes $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ $t_0 = 0$ es un punto singular regular.

(B) $2t(t-2)^2 y'' + 3t y' + (t-2) y = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a(t) &= 2t(t-2)^2 \\ b(t) &= 3t \\ c(t) &= t-2 \end{aligned}\right\} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Puntos singulares : $t=0$, $t=2$.

Notamos que :

- $t \dfrac{b(t)}{a(t)} = \dfrac{3t}{2(t-2)^2} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$

- $t^2 \dfrac{c(t)}{a(t)} = \dfrac{t}{2(t-2)} \longrightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$

$\therefore$ tienen series de potencias convergentes en $|t| < R < 2$.

Sin embargo :

$$(t-2) \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{3}{2(t-2)}$$

no tiene serie convergente cerca de $t=2$.

Concluimos que :

- $t=0$ es un punto singular regular
- $t=2$ " " " irregular.