Lección 3.13 : Ecuación de Euler. Método de Frobenius.

Ecuación diferencial homogénea de 2o. orden:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

con $a,b,c \in C(I;\mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$, abierto.

$t_0 = 0$ punto singular de (1).

<u>Ecuación de Euler</u> : sea la ecuación

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes, $I = [0,\infty)$, $t>0$.

Aquí

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= t^2 \\ b(t) &= \alpha t \\ c(t) &= \beta \end{aligned}\right\} \in C(\mathbb{R})$$

El único punto singular es $t_0 = 0$.
En virtud de que las funciones:

- $t \dfrac{b(t)}{a(t)} = \alpha$
- $t^2 \dfrac{c(t)}{a(t)} = \beta$

tienen expansiones de Taylor alrededor de $t_0 = 0$, convergentes $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ el punto singular $t_0 = 0$ de la ecuación (2) es <u>regular</u>.

Haciendo el cambio de variables:

$$\begin{cases} \forall t > 0 \quad \text{escribimos} \quad t := e^{\xi} > 0 \\ w(\xi) := y(e^{\xi}) = y(t) \end{cases}$$

de manera que:

$$w'(\xi) = y'(e^{\xi})\, e^{\xi}$$

$$w''(\xi) = y''(e^{\xi})(e^{\xi})^2 + y'(e^{\xi})e^{\xi}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y \\ &= e^{2\xi} y''(e^{\xi}) + \alpha e^{\xi} y'(e^{\xi}) + \beta y(e^{\xi}) \\ &= w''(\xi) - w'(\xi) + \alpha w'(\xi) + \beta w(\xi) \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación con coeficientes constantes:

(3) ... $w'' + (\alpha-1)w' + \beta w = 0$

La ecuación característica de (3) es:

$$r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0$$

raíces: $r_{1,2} = -\frac{1}{2}(\alpha-1) \pm \frac{1}{2}\left((\alpha-1)^2 - 4\beta\right)^{1/2}$

pueden ser:

(i) raíces reales distintas, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$ si $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$.

La solución de (3) es:

$$w(\xi) = Ae^{r_1\xi} + Be^{r_2\xi}, \quad A, B \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

$$\underset{t=e^{\xi}}{\Rightarrow} \quad y(t) = A\underbrace{t^{r_1}}_{=y_1(t)} + B\underbrace{t^{r_2}}_{=y_2(t)}, \quad t>0 \quad \cdots (4)$$

es la solución general de la ecuación de Euler (2) en este caso, ya que

$$W[y_1, y_2] = \underbrace{(r_2-r_1)}_{\neq 0}t^{r_1+r_2-1} \neq 0 \quad \forall t>0$$

si $r_1 \neq r_2$.

(ii) Si $4\beta - (\alpha-1)^2 > 0$ entonces las raíces son complejas

$$r_{1,2} = \lambda \pm i\eta$$

con $\lambda = -\frac{1}{2}(\alpha-1)$

$$\eta = \sqrt{4\beta - (\alpha-1)^2} > 0$$

La solución general de (3) es

$$w(\xi) = Ae^{\lambda\xi}\cos(\eta\xi) + Be^{\lambda\xi}\sin(\eta\xi)$$

$$\Rightarrow y(t) = A\underbrace{t^{\lambda}\cos(\eta\log t)}_{=:y_1(t)} + B\underbrace{t^{\lambda}\sin(\eta\log t)}_{=:y_2(t)} \quad \cdots (5)$$

para $t>0$, $A, B \in \mathbb{R}$ constantes

$$W[y_1,y_2](t) = \eta t^{2\lambda-1} \neq 0 \quad \text{si} \quad t>0.$$

$\Rightarrow$ (5) solución general de (2) (caso (ii))

(iii) raíz múltiple real : $r_1 = r_2 = r = -\frac{1}{2}(\alpha-1) \in \mathbb{R}$

si $4\beta = (\alpha-1)^2$.

Solución general de (3) :

$$w(\xi) = (A + B\xi)e^{r\xi}, \quad A, B \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = A\underbrace{t^r}_{=:y_1(t)} + B\underbrace{t^r \log t}_{=:y_2(t)} \quad \cdots (6)$$

sol. gral. de (2) en el caso (iii)

$$W[y_1, y_2] = t^{2r-1} \neq 0 \quad \text{si} \quad t>0.$$

Conclusión: la ecuación de Euler (2) se puede resolver explícitamente. La solución general es (4), (5), ó (6) según el caso.

Método de Frobenius

Para el caso general (1), suponemos que $t_0 \in I$ es un punto singular regular de modo que:

$$\left.\begin{aligned} p(t) &:= (t-t_0)\frac{b(t)}{a(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t-t_0)^n \\ q(t) &:= (t-t_0)^2\frac{c(t)}{a(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t-t_0)^n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

tienen series convergentes para $|t-t_0|<R$.

Denotamos :

$$\lim_{t\to t_0} p(t) =: p_0, \quad \lim_{t\to t_0} q(t) = q_0 .$$

Suponemos que satisfacen $p_0^2+q_0^2 \neq 0$ (no son simultáneamente cero).

Idea (Frobenius) :

- Observar la ecuación de Euler aproximada :

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)\, p_0\, y' + q_0 y = 0 \quad \cdots (8)$$

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (t-t_0)^2 y'' + (t-t_0) \underbrace{p(t)}_{\approx p_0} y' + \underbrace{q(t)}_{\approx q_0} y = 0$$

Sin pérdida de generalidad tomamos $t_0=0$ ($\tilde{t} \to t-t_0$, $\tilde{y} = y(t-t_0)$, etc.) obtenemos una Euler :

$$t^2 y'' + t p_0 y' + q_0 y = 0 \quad \cdots (8')$$

obtenemos la ec. característica :

$$r^2 + (P_0 - 1)r + q_0 = r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0 \quad \cdots (9)$$

Sus raíces son r_1, r_2 [casos (i) - (iii)]

La ecuación (9) se conoce como ecuación indicial

- Proponer soluciones de (1) de la forma

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

donde r es raíz de (9). Sustituir en la ecuación y se halla una relación de recurrencia para los coeficientes a_n's.

- Analizar la independencia lineal de las soluciones. Esto dependerá de las raíces r_1, r_2 de (9). En cada caso la convergencia estará garantizada en $|t - t_0| < R$.

Es posible demostrar el siguiente teorema :

Teorema (Frobenius)

Para la ecuación general (1) con $a, b, c \in C(I;\mathbb{R})$, supongamos que $t = t_0 \in I$ es un punto singular regular de manera que $p(t)$ y $q(t)$ definidas en (7) tienen series convergentes de potencias para $|t - t_0| < R$, con $R > 0$. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ las raíces de la ecuación indicial (9). Entonces:

(i) Si $\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2$ y $r_1 - r_2$ no es un entero no negativo ($r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$) entonces existen dos soluciones linealmente independientes de (1) de la forma:

$$(10) \dots \quad y_1(t) = |t - t_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (t - t_0)^n$$

$$(11) \dots \quad y_2(t) = |t - t_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} (t - t_0)^n$$

(ii) Si $r_1 = r_2$ (raíz múltiple) entonces existen dos soluciones linealmente independientes de (1): una de ellas es de la forma (10), $y_1(t)$; la otra es de la forma

$$y_2(t) = y_1(t) \log |t - t_0| + |t - t_0|^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (t - t_0)^n \quad \dots (12)$$

(iii) Si r_1, r_2 son tales que

$r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}_+ , \quad r_1 \neq r_2 ,$

entonces existen dos soluciones linealmente independientes de (1). Una de ellas es de la forma (10), la segunda es de la forma

$$y_2(t) = \theta\, y_1(t) \log|t - t_0| + \\ + |t-t_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n \quad \cdots (13)$$

En todos los casos las constantes $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, b_n, c_n y θ se pueden determinar sustituyendo las series en (1). La constante θ puede ser 0. Las soluciones convergen $\forall\ |t-t_0| < R$.