Lección 3.2 : Ecuaciones con coeficientes constantes.

Ejemplos:

(A) Sea la ecuación $y'' - y = 0.$

Operador $\begin{cases} L : C^2(I;\mathbb{R}) \to C(I;\mathbb{R}) \\ Ly = y'' - y \end{cases}$

$I = \mathbb{R}$. La ecuación tiene 2 soluciones:

$y_1(t) := e^t \Rightarrow Ly_1 = e^t - e^t = 0$

$y_2(t) := e^{-t} \Rightarrow Ly_2 = e^{-t} - e^{-t} = 0$

Calculamos

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= e^t(-e^{-t}) - e^t e^{-t} \\ &= -2 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

conclusión: son linealmente independientes y toda solución de $Ly = y'' - y = 0$ es la forma

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

con C_1, C_2 constantes

Aquí $W(t) = -2$ es solución de
$W' + p(t)W = 0$, ya que $p(t) \equiv 0 \quad \forall t$.

(B) Sea el operador

$$Ly = y'' - \left(\frac{t+2}{t}\right)y' + \frac{2}{t}y = 0$$

aquí $p(t) = -\left(\frac{t+2}{t}\right) \in C(I; \mathbb{R})$

$$q(t) = \frac{2}{t}$$

con $I = (0,\infty)$.

Dos soluciones son:

- $y_1(t) = e^t$
- $y_2(t) = t^2 + 2t + 2$.

En efecto:

- $y_1' = e^t, \quad y_1'' = e^t$

$$\Rightarrow Ly_1 = e^t - \left(\frac{t+2}{t}\right)e^t + \frac{2}{t}e^t$$

$$= e^t - e^t - \frac{2}{t}e^t + \frac{2}{t}e^t = 0. \quad \forall t \neq 0.$$

• $y_2' = 2t+2, \quad y_2'' = 2$

$$\Rightarrow Ly_2 = 2 - \left(\frac{t+2}{t}\right)(2t+2) + \frac{2}{t}\left(t^2+2t+2\right) = 0 \quad \forall\, t \neq 0.$$

Calculamos:

$$W(t) = W[y_1,y_2](t) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$
$$= e^t(2t+2) - e^t(t^2+2t+2)$$
$$= -t^2 e^t \neq 0 \qquad \text{si } t \neq 0$$

p. ej. en $I = (0,\infty)$

$\therefore$ toda solución de $Ly=0$ es de la forma

$$y(t) = C_1 e^t + C_2\left(t^2+2t+2\right)$$

con C_j constantes.

$W = -t^2 e^t$ satisface $W' + p(t)W = 0$:

En efecto, $-t^2e^t - 2te^t + \left(\frac{t+2}{t}\right)t^2e^t$

$$= -t^2e^t - 2te^t + t^2e^t + 2te^t = 0.$$

¿Cómo encontrar ker L?

3.2 Coeficientes constantes

Consideremos el operador

$$(1)\cdots \begin{cases} L : C^2(I;\mathbb{R}) \to C(I;\mathbb{R}) \\ Ly = ay'' + by' + cy \end{cases}$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$ constantes, $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto.

Para resolver

$$(2)\cdots \quad Ly = ay'' + by' + cy = 0.$$

Proponemos soluciones de la forma

$$(3)\cdots \quad y(t) = e^{rt}$$

con r constante. Así,

$$y' = re^{rt}, \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} Ly &= ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} \\ &= [ar^2 + br + c]e^{rt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, y es solución de $Ly=0$ si y sólo si

$$ar^2+br+c = 0 \qquad \cdots (4)$$

ecuación característica

La ecuación (4) tiene 2 raíces:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b+(b^2-4ac)^{1/2}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b-(b^2-4ac)^{1/2}}{2a} \end{aligned}\right\} \cdots (5)$$

Caso (I): $b^2-4ac>0$

Aquí $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$. Se definen

$$y_1(t) = e^{r_1 t}$$

$$y_2(t) = e^{r_2 t}$$

Estas soluciones son linealmente independientes:

$$W(t) = W[y_1,y_2](t) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$= y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$= (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0 \quad \forall t, \quad r_1 \neq r_2$$

$\therefore$ $W(t) \neq 0$ $\forall t$ y las soluciones son linealmente independientes.

En este caso (I) $(b^2-4ac>0)$ la solución general es

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \cdots (6)$$

con C_1, C_2 constantes.

Ejemplo: $Ly = y'' + 5y' + 4 = 0$

Ecuación característica $\quad r^2 + 5r + 4 = 0$

$$\| $$

$$(r+4)(r+1)$$

$\Rightarrow$ $r_1 = -1$
$r_2 = -4$

solución general: $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$.

<u>Caso (II)</u>: $b^2 - 4ac < 0$

Definimos $\omega := \dfrac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2} > 0$.

Las raíces de la ecuación característica son

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\alpha + i\omega \\ r_2 &= -\alpha - i\omega \end{aligned}\right\} \in \mathbb{C}$$

donde $\alpha := \dfrac{b}{2a}$.

<u>Lema</u> Las funciones reales

$$y_1(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$$
$$y_2(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

son soluciones de $Ly = 0$ y son linealmente independientes.

<u>Demostración</u>: Derivando:

$$y_1' = -\alpha e^{-\alpha t} \cos \omega t - \omega e^{-\alpha t} \sin \omega t$$
$$= -e^{-\alpha t}\left[\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t\right]$$
$$y_1'' = e^{-\alpha t}\left[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t\right]$$

Así,

$$Ly_1 = a y_1'' + b y_1' + c y_1$$

$$= e^{-\alpha t}\left[a(\alpha^2-\omega^2) - b\alpha + c\right]\cos\omega t$$
$$+ e^{-\alpha t}\left[2a\alpha\omega - b\omega\right]\sin\omega t$$

Pero, $\alpha = \dfrac{b}{2a}$, $\omega = \dfrac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2}$

por lo cual,

- $\underbrace{(2a\alpha - b)}_{=0}\omega = 0$
- $a(\alpha^2-\omega^2) - b\alpha + c =$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{(4ac-b^2)}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$\therefore \quad Ly_1 = 0.$$

Análogamente $Ly_2 = 0$,

$$y_2 = e^{-\alpha t}\sin\omega t$$
$$y_2' = e^{-\alpha t}\left[-\alpha\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right]$$

Calculando:

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = y_1y_2' - y_1'y_2$$
$$= \left(e^{-\alpha t}\cos\omega t\right)\left(e^{-\alpha t}(-\alpha\sin\omega t + \omega\cos\omega t)\right)$$
$$+ e^{-\alpha t}\left[\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right]\cdot e^{-\alpha t}\sin\omega t$$

$$= e^{-\alpha t}\left[\omega\cos^2\omega t - \cancel{\alpha\sin\omega t\cos\omega t} + \cancel{\alpha\cos\omega t\sin\omega t} + \omega\sin^2\omega t\right]$$

$$= \omega e^{-\alpha t} \neq 0 \quad \text{ya que} \quad \omega > 0.$$

Las soluciones son linealmente independientes y toda solución es de la forma

$$(7)\ldots \quad y(t) = e^{-\alpha t}\left[C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right]$$

con
$$\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2} > 0$$
$$\alpha = \frac{b}{2a}$$

Ejemplo: $\quad Ly = y'' + y' + y$

Ecuación característica $\quad r^2 + r + 1 = 0$

con raíces
$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(1-4)^{1/2}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Las soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$y_2(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{\text{amplitud}}\underbrace{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{oscilatorio}}$$

$\therefore$ la solución general de la ecuación $y'' + y' + y = 0$ es

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$