Lección 3.3 : Coeficientes constantes (continuación).

Ecuaciones homogéneas de 2o. orden con coeficientes constantes:

$$Ly = ay'' + by' + cy = 0 \quad \cdots (1)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, constantes. Operador

$$L : C^2(I;\mathbb{R}) \longrightarrow C(I;\mathbb{R}) \quad \cdots (2)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$, abierto, $a \neq 0$.

Ec. característica: $ar^2 + br + c = 0 \cdots (3)$

Casos: (I) $b^2 - 4ac > 0$
(II) $b^2 - 4ac < 0$

Caso III $b^2 - 4ac = 0$.

$$(3) \Leftrightarrow \left(r + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

(3) tiene una única raíz (real)

$$r = -\frac{b}{2a}$$

Aquí, $y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ es solución de $Ly = 0$.

Debemos hallar otra solución que sea linealmente independiente con la primera. Para ello aplicamos el método de reducción de orden.

Idea: $y = v y_1$, suponemos que y es solución, donde y_1 es la solución conocida. Se deduce una ecuación diferencial para v.

Derivando: $$y' = v' y_1 + v y_1'$$
$$y'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Ly &= a y'' + b y' + c y \\ &= a[v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''] + \\ &\quad + b[v' y_1 + v y_1'] + c v y_1 \\ &= v \overbrace{[a y_1'' + b y_1' + c y_1]}^{Ly_1 = 0} + a y_1 v'' + \\ &\quad + (2a y_1' + b y_1) v' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ obtenemos la ecuación

$$a y_1 v'' + (2a y_1' + b y_1) v' = 0 \qquad \cdots (4)$$

que es una ecuación de primer orden para $u = v'$,

$$\overbrace{a y_1} u' + (\overbrace{2a y_1' + b y_1}) u = 0 \qquad \cdots (4')$$

Notamos que $\quad y_1 = e^{-\frac{b}{2a}t}$

$$\Rightarrow \quad y_1' = -\frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}t}$$

$$\Rightarrow \quad 2a y_1' + b y_1 = 0$$

Obtenemos: $\quad a y_1 u' = 0$

$a \neq 0$, $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}t} \neq 0 \quad \therefore \quad u' = 0.$

$\Rightarrow \quad v = \underbrace{C_1 t} + C_2$, con C_1, C_2 constantes.

$$y = v y_1$$

$C_1 t e^{-\frac{b}{2a}t} \qquad C_2 e^{-\frac{b}{2a}t}$

Esto sugiere que la solución general de $Ly = 0$ es:

$$y(t) = C_1 \underbrace{t e^{-\frac{b}{2a}t}}_{=: y_2(t)} + C_2 \underbrace{e^{-\frac{b}{2a}t}}_{=: y_1(t)} \qquad \cdots (5)$$

sólo resta demostrar que

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y_2(t) := te^{-\frac{b}{2a}t}$$

son linealmente independientes.

calculamos:

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

$$= e^{-\frac{b}{2a}t}\left(1-\frac{b}{2a}t\right)e^{-\frac{b}{2a}t} + \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}te^{-\frac{b}{2a}t}$$

$$= e^{-\frac{b}{a}t} \neq 0.$$

concluimos que son linealmente independientes y por ende generan al núcleo de L, es decir, (5) es la solución general de $Ly=0$.

Ejemplo: sea $Ly = y'' + 2y' + 1 = 0$

EC. característica $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$

$\therefore \quad r = -1$ única raíz

Las soluciones son: $y_1(t) = e^{-t}$

$y_2(t) = te^{-t}$

$\Rightarrow \quad y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ sol. general.

Observación (importante)

El método de reducción de orden se puede aplicar al caso general.

Supongamos que $y_1 = y_1(t)$ es una solución conocida de la ecuación homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad \dots (6)$$

con $p, q \in C(I; \mathbb{R})$.

Método de reducción de orden: Sea

$$y := v y_1$$

Suponiendo que y es solución de (6):

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + q(t)y &= v y_1'' + 2v'y_1' + v''y_1 + \\ &\quad + p(t)(v y_1' + v'y_1) + \\ &\quad + q(t) v y_1 \\ &= v \underbrace{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}_{= Ly = 0} + \\ &\quad + \underbrace{(2y_1' + p(t)y_1)v'}_{} + \underbrace{y_1 v''}_{} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos una ecuación de primer orden para $u = v'$

$$y_1 u' + (2y_1' + p(t) y_1) u = 0 \quad \cdots (7)$$

$$\Leftrightarrow \quad u' + \underbrace{\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(t) \right)}_{a(t)} u = 0$$

La solución general de (7) es:

$$u(t) = C \exp\left(- \int^t a(s)\, ds \right)$$
$$= C \exp\left(- \int^t \left(\frac{2y_1'(s)}{y_1(s)} + p(s) \right) ds \right)$$

Por lo tanto, integrando

$$v(t) = C_1 \int^t \exp\left(- \int^{\xi} \frac{2y_1'(s)}{y_1(s)} + p(s)\, ds \right) d\xi + C_2$$

La solución general es:

$$y(t) = C_1 \left[\int^t \exp\left(- \int^{\xi} \frac{2y_1'(s)}{y_1(s)} + p(s)\, ds \right) d\xi \right] \times y_1(t) + C_2 y_1(t) \quad \cdots (8).$$

Ejemplo: sea el operador

$$Ly = y'' + \frac{3}{2t} y' - \frac{1}{2t^2} y = 0$$

Aquí $p(t) = \frac{3}{2t}$, $q(t) = -\frac{1}{2t^2}$

¿cómo hallar la primera solución $y_1 = y_1(t)$?

Notamos que $p = O(t^{-1})$, $q = O(t^{-2})$ por lo cual proponemos

$$y_1(t) = \frac{\alpha}{t} \quad \text{con } \alpha \text{ constante.}$$

Derivando, $y_1' = -\frac{\alpha}{t^2}$, $y_1'' = \frac{2\alpha}{t^3}$

$$\Rightarrow Ly_1 = \frac{2\alpha}{t^3} + \frac{3}{2t}\left(-\frac{\alpha}{t^2}\right) - \frac{1}{2t^2}\left(\frac{\alpha}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2t^3}\left[4\alpha - 3\alpha - \alpha\right] = 0$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ const.

Escogemos $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

Reducción de orden: $\quad y = v y_1 = \dfrac{v}{t}$.

Entonces: $\quad y' = \dfrac{v'}{t} - \dfrac{v}{t^2}$

$$y'' = \frac{v''}{t} - \frac{2v'}{t^2} + \frac{2v}{t^3}$$

sustituyendo:

$$Ly = y'' + \frac{3}{2t} y' - \frac{1}{2t^2} y$$

$$= \frac{v''}{t} - \frac{2v'}{t^2} + \cancel{\frac{2v}{t^3}} + \frac{3}{2t}\left(\frac{v'}{t} - \cancel{\frac{v}{t^2}}\right) + - \frac{1}{2t^2}\cancel{\left(\frac{v}{t}\right)}$$

$$= \frac{v''}{t} - \frac{1}{2t^2} v' = 0$$

Ec. de 1er- orden para $u = v'$:

$$u' - \frac{1}{2t} u = 0$$

solución:

$$u = C \exp\left(\int^t \frac{ds}{2s}\right) = C \exp(\log t^{1/2})$$

$$= C t^{1/2}, \qquad t > 0$$

Así,

$$v(t) = \tilde{C}\, t^{3/2}$$

Pero $y_2 = \dfrac{v}{t}$

$$\Rightarrow \quad y_2(t) := \tilde{C}\, t^{1/2}$$

La solución general de $y'' + \frac{3}{2t} y' - \frac{1}{2t^2} y = 0$ es

$$y(t) = \frac{C_1}{t} + C_2\, t^{1/2}$$ ✓

Ejercicio: verificar que $\left\{ \frac{1}{t}, t^{1/2} \right\}$ es linealmente independiente en $t>0$.