Lección 3.4 : Ecuaciones no homogéneas: fórmula de variación de parámetros.

Consideremos el operador

$$\left.\begin{aligned} Ly &= y'' + p(t)y' + q(t)y \\ L &: C^2(I;\mathbb{R}) \longrightarrow C(I;\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

y la ecuación no homogénea

$$Ly = f(t) \qquad \cdots \quad (2)$$

con $p, q, f \in C(I;\mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto.

Lema 1 Si $y_1, y_2 \in C^2(I;\mathbb{R})$ son soluciones de la ecuación no homogénea (2) entonces $y := y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea, $Ly = 0$. Si v_1, v_2 son dos soluciones linealmente independientes de $Ly = 0$ entonces existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y = y_1 - y_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

Demostración: Claramente

$$Ly = L(y_1 - y_2) \underset{L \text{ lineal}}{=} Ly_1 - Ly_2 = f - f = 0.$$

Por lo tanto, $y = y_1 - y_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, en virtud de que $\ker L = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. $\square$

<u>Corolario</u> La solución general de la ecuación no homogénea (2) es de la forma

$$(3) \ldots \quad y(t) = \underbrace{c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)}_{\text{sol. gral. de la homogénea}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{sol. particular de la no homogénea}}$$

donde:

- $y_p = y_p(t)$ es <u>cualquier</u> solución particular de la no homogénea (2)
- v_1, v_2 son dos soluciones linealmente independientes de de $Lv = 0$.

Demostración: Aplicar el lema 1 a $y_1 = y$ donde y es cualquier solución de (2) y a $y_2 = y_p$, donde y_p es la solución particular. $\square$

Ejemplos:

(A) Sea la ecuación

$$Ly = \underbrace{y'' + y}_{} = e^{t} \quad \ldots (3)$$

Ec. homogénea: $Ly = y'' + y = 0$.

Ecuación característica (coef. constantes): $r^2 + 1 = 0$

Raíces $r_{1,2} = \pm i$

La solución general de la homogénea es

$$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

¿Cómo hallamos la solución particular?

En este ejemplo, lo más sencillo es proponer una solución por ansatz del lado derecho:

$$y_p(t) = Ae^t$$

Así, $y_p' = Ae^t = y_p''$

$\Rightarrow Ly_p = y_p'' + y_p = 2Ae^t = e^t$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

La solución particular es $y_p(t) = \frac{1}{2}e^t$.

Toda solución de (3) es de la forma:

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t$$

(solución general de (3)).

(B) Sea la ecuación:

$$(4)\cdots \quad Ly = y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 4, \quad t>0$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= -\frac{2}{t} \\ q(t) &= \frac{2}{t^2} \\ f(t) &= 4 \end{aligned}\right\} \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}) \quad I = (0,\infty)$$

Ec. homogénea: $\quad Ly = y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0.$

Proponemos una solución de la forma

$$y(t) = t^r.$$

$$\Rightarrow \quad y' = rt^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)t^{r-2}$$

$$\Rightarrow \quad Ly = r(r-1)t^{r-2} - \left(\frac{2}{t}\right)rt^{r-1} + $$

$$+ \left(\frac{2}{t^2}\right)t^r$$

$$= t^{r-2}\left[r(r-1) - 2r + 2\right]$$

$$= t^{r-2}(r-1)(r-2), \quad t>0$$

Tenemos

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^2$$

soluciones de $Ly = 0$.

son linealmente independientes:

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = t^2 \neq 0 \quad \text{si } t>0.$$

Sol. de la homogénea:

$$y_h(t) = C_1 t + C_2 t^2.$$

Aplicación [no estándar] del método de reducción de orden: proponemos

$$y_p = v\, y_1 = t v$$

solución particular de la no homogénea

una de las soluciones de la homogénea.

y sustituimos en $L y_p = 4$.

Derivando:

$$y_p' = t v' + v$$

$$y_p'' = t v'' + 2v'$$

$$\Rightarrow L y_p = y_p'' - \frac{2}{t} y_p' + \frac{2}{t^2} y_p$$

$$= t v'' + 2v' - \frac{2}{t}\left[t v' + v\right] + \frac{2}{t^2}(t v)$$

$$= tv'' + \cancel{2v'} - \cancel{2v'} - \cancel{\frac{2}{t}v} + \cancel{\frac{2}{t}v}$$

$$= tv''$$

$$= 4$$

$$\Rightarrow \qquad v'' = \frac{4}{t}$$

Integrando $\quad v' = 4 \log t + C, \quad t > 0$, $C \in \mathbb{R}$

Escogemos $C \equiv 0$ e integramos

$$v = 4 \int^t \log t$$

$$= 4t(\log t - 1)$$

$$\Rightarrow \quad y_p(t) = t\, v(t)$$

$$= 4t^2(\log t - 1), \qquad t > 0$$

La solución general de (4) es:

$$y(t) = C_1 t + C_2 t^2 + 4t^2(\log t - 1),$$

$$t > 0$$

Fórmula de variación de parámetros

Sea

(1) ... $Ly = y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$

con $p, q, f \in C(I; \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$.

Sean $y_1, y_2 \in C^2(I; \mathbb{R})$ dos soluciones linealmente independientes de

(2) ... $Ly = 0$.

Suponemos que una solución de (1) es de la forma

(3) ... $y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$

$C_j = C_j(t) \in C^1(I; \mathbb{R})$ "parámetros que varían con t"

Derivando:

$$y' = C_1 y_1' + C_1' y_1 + C_2 y_2' + C_2' y_2$$

$$= \underbrace{(C_1' y_1 + C_2' y_2)}_{=0} + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

Supongamos que:

$$(4)\cdots \quad C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

En ese caso:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2'$$

Sustituyendo en $Ly = f$:

$$
\begin{aligned}
Ly &= y'' + p(t)y' + q(t)y \\
&= C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2' + \\
&\quad + p(t)\left[C_1 y_1' + C_2 y_2'\right] + \\
&\quad + q(t)\left[C_1 y_1 + C_2 y_2\right] \\
&= C_1 \Big(\underbrace{y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1}_{= Ly_1 = 0}\Big) + \\
&\quad + C_2 \Big(\underbrace{y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2}_{= Ly_2 = 0}\Big) + \\
&\quad + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f
\end{aligned}
$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\boxed{(5)\cdots \begin{cases} y_1(t)C_1'(t) + y_2(t)C_2'(t) = 0, \\ y_1'(t)C_1'(t) + y_2'(t)C_2'(t) = f, \end{cases} \quad t \in I}
$$

Multiplicando la 1a. ec. $\times$ y_2'
2a. ec. $\times$ y_2 :

$$y_1 y_2' c_1' + y_2 y_2' c_2' = 0$$
$$y_1' y_2 c_1' + y_2 y_2' c_2' = y_2 f$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[y_1 y_2' - y_1' y_2 \right]}_{= W[y_1, y_2](t) = W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I} c_1' = -y_2 f$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(t) = -\frac{y_2(t) f(t)}{W(t)}$$

Análogamente

$$c_2'(t) = -\frac{y_1(t) c_1'(t)}{y_2(t)}$$

$$= -\frac{y_1(t)}{y_2(t)} \left[-\frac{y_2(t) f(t)}{W(t)} \right]$$

$$= \frac{y_1(t) f(t)}{W(t)}$$

Integrando,

$$\left. \begin{aligned} c_1(t) &= -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s) f(s)}{W(s)} ds \\ c_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) f(s)}{W(s)} ds \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

con $t_0 \in I$ arbitrario.

<u>Lema 2</u> Sean $p, q, f \in C(I;\mathbb{R})$. Sean y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de $Ly = y'' + py' + q = 0$, con $W(t) = W[y_1, y_2](t) \neq 0$ $\forall t \in I$. Entonces la solución general de

$$Ly = f$$

es:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \boxed{- y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s) f(s)}{W(s)}\, ds + y_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) f(s)}{W(s)}\, ds} \quad \cdots (7)$$

con $t_0 \in I$ arbitrario.

(7) es la <u>fórmula de variación de parámetros</u>.