Lección 3.5 : Variación de parámetros: ejemplos.

Ejemplos :

(A) Sea la ecuación

$$Ly = y'' - \left(\frac{1+t}{t}\right)y' + \frac{1}{t}y = t^2 e^{2t},$$

$$t>0$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= -\left(1+\frac{1}{t}\right) \\ q(t) &= \frac{1}{t} \\ f(t) &= t^2 e^{2t} \end{aligned}\right\} \in C(I;\mathbb{R}) \qquad I = (0,\infty)$$

Ecuación homogénea : $Ly = 0$.

Proponemos una solución de la forma

$$y_1(t) = At + B$$

$$\Rightarrow \quad Ly_1 = -\left(1+\frac{1}{t}\right)A + \frac{1}{t}(At+B)$$

$$= -A - \frac{A}{t} + A + \frac{B}{t} = \frac{(B-A)}{t} = 0$$

Tomamos $A = B = 1$ y $y_1(t) = 1+t$ es solución.

observamos que

$$Ly = (y'' - y') + \frac{1}{t}(y - y')$$

$\therefore$ si $y'' = y'$ y $y' = y$ $\forall t$ entonces $Ly = 0$. La segunda solución es

$$y_2(t) = e^t.$$

$$W[y_1, y_2](t) = W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$$

$$= te^t \neq 0 \quad \text{si } t > 0.$$

$\therefore$ la solución general de la homogénea es

$$Y_H(t) = C_1(t+1) + C_2 e^t.$$

$$W(t) = te^t.$$

Variación de parámetros:

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s) f(s)}{W(s)} \, ds$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \frac{e^s s^2 e^{2s}}{s e^s} \, ds$$

$$= - \int_{t_0}^{t} s e^{2s} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \left(\frac{1}{2} - t \right) + \tilde{C}(t_0)$$

Asimismo,

$$C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) f(s)}{W(s)} \, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{(1+s) s^2 e^{2s}}{s e^s} \, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} (1+s) s e^{s} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + \bar{C}(t_0)$$

Escogiendo, la solución particular es

$$y_p(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \left(\frac{1}{2} - t \right)(1+t) + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} e^{t}$$

Así, la solución general es:

$$y(t) = \overbrace{C_1(1+t) + C_2 e^{t}}^{\text{sol. gral. de la homogénea}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{2t} \left(\frac{1}{2} - t \right)(1+t) + \frac{1}{2} t^2 e^{3t}}_{\text{solución particular de la no homogénea}}$$

(B) Encontrar la solución general de

$$t^2 y'' - 2y = t^2 \log t, \qquad t>0$$

Dividimos entre t^2 para poner la ec. en forma estándar:

$$Ly := y'' - \frac{2}{t^2} y = \log t, \qquad t>0$$

Aquí

$$\left.\begin{array}{l} p(t) \equiv 0 \\ q(t) = -\dfrac{2}{t^2} \\ f(t) = \log t \end{array}\right\} \in C(I;\mathbb{K}) \qquad I = (0,\infty)$$

Para determinar el núcleo de L, observamos que si $y = At^2$ entonces $y'' = 2A$ (constante) y $-\frac{2}{t^2} y = -2A$ (constante).

$\therefore$ escogiendo $A=1$ tenemos

$$y_1(t) = t^2$$

solución de $Ly = 0$.

$$Ly_1 = y_1'' - \frac{2}{t^2} y_1 = 2 - \frac{2}{t^2}(t^2) = 0.$$

Para hallar y_2, solución de $Ly = 0$ aplicamos reducción de orden:

$$y = v y_1 = t^2 v$$

$$\therefore \quad y' = 2tv + t^2 v'$$

$$y'' = 2v + 4tv' + t^2 v''$$

Sustituyendo:

$$Ly = y'' - \frac{2}{t^2} y$$

$$= \cancel{2v} + 4tv' + t^2 v'' - \cancel{\frac{2}{t^2}(t^2 v)}$$

$$= t^2 v'' + 4tv'$$

$$= 0.$$

Ecuación de primer grado para $u = v'$:

$$t^2 u' + 4tu = 0$$

$$\Rightarrow \quad u' + \frac{4}{t} u = 0, \qquad t > 0$$

$$\int^t \frac{4}{s}\, ds = 4 \log t$$

$$\Rightarrow \exp\left(\int^t \frac{4}{s}\, ds\right) = t^4$$

Multiplicando por t^4:

$$t^4 u' + 4t^3 u = \frac{d}{dt}\left(t^4 u\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad t^4 u = C, \quad$ con $C \in \mathbb{R}$ constante.

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{C}{t^4} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{C}{4t^3} + C_2$$

$$= \frac{\tilde{C}}{t^3} + C_2$$

Escogemos $\tilde{C} = 1$, $C_2 = 0$: $\quad v = \frac{1}{t^3}$

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = \frac{1}{t}, \qquad t > 0.$$

Es solución de $Ly_2 = 0$:

$$y_2 = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad y_2' = -\frac{1}{t^2}, \quad y_2'' = \frac{2}{t^3}$$

$$\therefore \quad Ly_2 = \frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \quad \forall\, t > 0.$$

Son linealmente independientes:

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} t^2 & 1/t \\ 2t & -1/t^2 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \neq 0.$$

La solución general de la homogénea es

$$y_h(t) = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t}, \qquad t > 0.$$

Calculando:

$$C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s) f(s)}{W(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{s^2 \log s}{-3}\, ds$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} t^3 \log t - \frac{1}{9} t^3\right] + \cancelto{0}{\tilde{C}(t_0)}$$

$$= \frac{t^3}{9}\left[\frac{1}{3} - \log t\right]$$

Analogamente,

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)\, f(s)}{W(s)}\, ds$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} \log s \left(\frac{-1}{3}\right) ds$$

$$= \frac{1}{3}\int_{t_0}^{t} \frac{\log s}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{3}\int_{t_0}^{t} \log s \, \frac{d}{ds}\left(\log s\right) ds$$

$$= \frac{1}{6}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left((\log s)^2\right) ds$$

$$= \frac{1}{6}(\log t)^2 + \cancel{\bar{C}(t_0)}^{\,0}$$

Así, la solución particular de la no homogénea es

$$y_p(t) = C_1(t)\, y_1(t) + C_2(t)\, y_2(t)$$

$$= \frac{(\log t)^2}{6} t^2 + \frac{t^2}{9}\left(\frac{1}{3} - \log t\right)$$

La solución general de la ecuación es

$$y(t) = \underbrace{C_1 t^2 + \frac{C_2}{t}}_{\text{sol. gral. de la homogénea}} +$$

$$\underbrace{+ \frac{t^2}{6}(\log t)^2 + \frac{t^2}{9}\left(\frac{1}{3} - \log t\right)}_{\text{sol. particular de la no homogénea.}}$$