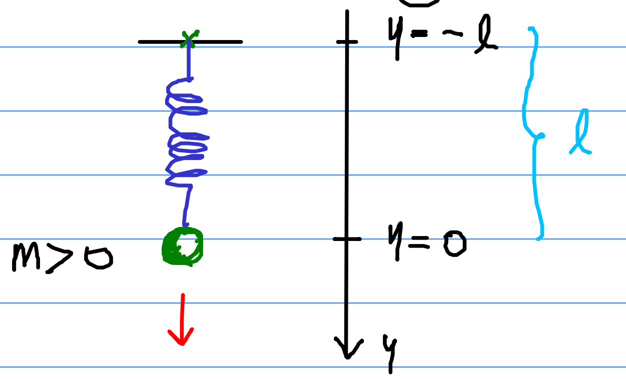
Lección 3.6 : Aplicación: Oscilaciones forzadas.

Objeto puntual de masa $m>0$, sujeto a un resorte de longitud $l>0$ en reposo bajo la acción de fuerzas externas (fuerza de gravedad, por ejemplo):



Ley de Hooke: la fuerza del resorte es proporcional a su deformación

$$F \approx k \Delta l$$

con $k>0$ constante
Δl deformación.

La posición de equilibrio $y=0$ está asociada al punto cuando el peso del objeto está balanceado exactamente por la fuerza de restitución del resorte:

$$\underbrace{mg}_{\text{peso}} = \underbrace{k \Delta l}_{\text{ley de Hooke}}$$

$g>0$ aceleración de gravedad

Además: la fricción del medio (aire, agua, aceite, etc.) ejerce una fuerza de "amortiguamiento" en dirección $-y$ y proporcional a la velocidad.

Si $y = y(t)$ es la posición del objeto con respecto a la posición de equilibrio $(y=0)$ a tiempo $t \geq 0$, la fuerza de amortiguamiento es

$$F_{amo} = -c\frac{dy}{dt} \quad \text{con } c \geq 0 \text{ constante}$$

Fuerza de restitución del resorte:

$$F_{Hooke} = -k(\Delta l + y(t))$$

Fuerzas externas:

$$F_{ext} = mg + \underbrace{F(t)}_{\text{forzamiento extra.}}$$

Por la 2a. ley de Newton:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_j \quad (\Sigma \text{ de fuerzas})$$

$$= F_{Hooke} + F_{amo} + F_{ext}$$

$$= -k(\Delta l + y(t)) - c\frac{dy}{dt} + mg + F(t)$$

Como $mg = k\Delta l$, obtenemos el siguiente modelo básico de vibración mecánica:

$$(1) \ldots \quad my'' + cy' + ky = F(t)$$

$F = F(t)$ función conocida o "forzamiento".

Casos:

(A) Vibración libre:
- no hay fricción $c \equiv 0$
- ausencia de fuerzas ext. $F(t) \equiv 0$.

Entonces (1) es:

$$my'' + ky = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Definimos la frecuencia "natural" del resorte:

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots \quad (3)$$

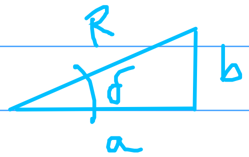
$$(2) \Rightarrow \quad y'' + \omega_0^2 y = 0 \quad \ldots \quad (2')$$

La solución general de (2) es

$$(4) \ldots \quad y(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

Haciendo la sustitución



$$R = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \delta = \text{Arc}\tan\frac{b}{a}$$

escribimos (4) de la forma

$$y(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{amplitud}}}{R} \underbrace{\cos(\omega_0 t - \delta)}_{\text{oscilatorio}} \quad \cdots (5)$$

Propiedades:

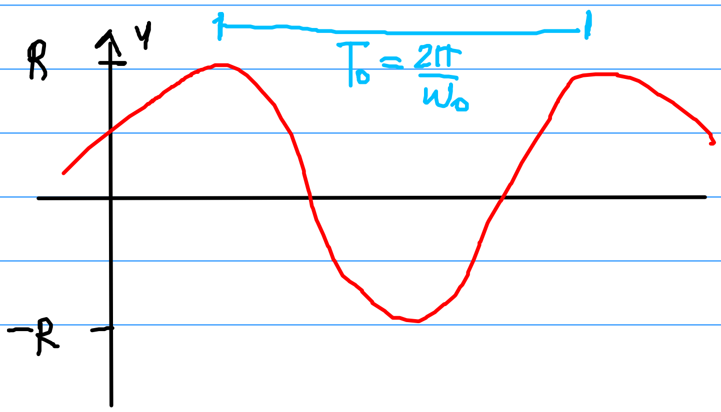
- El movimiento es periódico en t.
- La amplitud de la oscilación es acotada

$$|y(t)| \leq R, \qquad \forall t$$

- El periodo fundamental de la oscilación es

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \cdots (6)$$

Periodo "natural" del resorte.



(B) Vibración no forzada con fricción:

- hay amortiguamiento, $c > 0$
- no hay fuerzas externas $F(t) \equiv 0$

oscilaciones amortiguadas (damped oscillations).

El modelo (1) es:

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \cdots (7)$$

con $m, c, k > 0$ constantes.

Ec. característica:

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad \cdots (8)$$

las raíces son

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\left(c^2 - 4mk\right)^{1/2} \quad \cdots (9)$$

casos: (i) $c^2 > 4mk$

oscilación sobre amortiguada (overdamped oscillation)

Las raíces son reales:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Dado que $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 < \left(\frac{c}{2m}\right)^2$

las dos raíces son negativas

$$r_1 = \frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} < r_2 = \frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$$

La solución general es:

(10)... $y(t) = ae^{-|r_1|t} + be^{-|r_2|t} \to 0$ si $t \to \infty$

a, b constantes.

Caso (ii): $c^2 = 4mk > 0$

una raíz real $r = -\frac{c}{2m}$

∴ la solución general es de la forma

(11)... $y(t) = (a+bt)e^{-\frac{c}{2m}t} \to 0$ si $t \to \infty$.

con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

"críticamente amortiguado".

Caso (iii) : $c^2 < 4mk$ caso subamortiguado

Definimos

$$\mu := \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}_{>0 \ (iii)}} > 0$$

La solución general es de la forma:

$$y(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[a\cos\mu t + b\sin\mu t\right]$$

$$= R e^{-\frac{c}{2m}t}\cos(\mu t - \delta) \quad \ldots (12)$$

con $R^2 = a^2 + b^2$, $\delta = \operatorname{Arc\,tan}\frac{b}{a}$.

La solución oscila con frecuencia

$$0 < \mu = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} < \omega_0$$

Si $c \to 0$ entonces $\mu \to \omega_0$

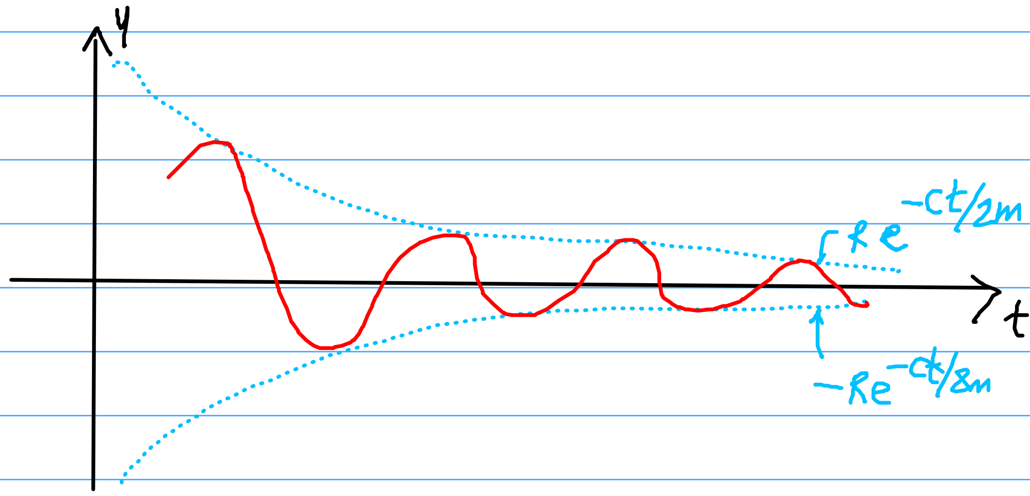
El periodo fundamental es

$$T = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}$$

Claramente

$$0 \leq |y(t)| \leq Re^{-\frac{c}{2m}t} \longrightarrow 0 \quad \text{si } t \to \infty$$

$$\therefore \quad y(t) \to 0 \quad \text{si } t \to \infty.$$



Conclusión: en ausencia de fuerzas externas la solución siempre tiende a 0.

(c) Oscilaciones forzadas con fricción

$$(1) \Rightarrow \quad my'' + cy' + ky = F(t).$$

Caso particular:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

con $F_0 > 0$, $\omega > 0$ constantes.

Forzamiento oscilante: fuerza externa con periodo y frecuencia de osilación (ej. terremoto).

Modelo:

$$\overbrace{my'' + cy' + ky}^{} = F_0 \cos \omega t \quad \dots (13)$$

$m, c, k, F_0, \omega > 0$ constantes.

La solución gral. de la homogénea depende de $\operatorname{sgn}(c^2 - 4mk)$:

$$\left.\begin{array}{lll} c^2 > 4mk & \Rightarrow & \text{(i) sobre-} \\ c^2 = 4mk & \Rightarrow & \text{(ii) críticamente} \\ c^2 < 4mk & \Rightarrow & \text{(iii) sub-} \end{array}\right\} \text{amortiguado}$$

Hallar solución partícular de (13):

$$y_p(t) =: \varphi(t)$$

solución general:

sol. gral de la homogénea

$$\varphi(t) + \left[\begin{array}{c} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{array}\right]$$