Lección 3.7 : Oscilaciones forzadas. Resonancia.

Modelo básico de vibración mecánica

$$my'' + cy' + ky = F(t) \qquad \cdots (1)$$

con $m, k > 0$, $c \geq 0$, $F = F(t)$ forzamiento (función conocida).

Osilaciones no forzadas : $F(t) \equiv 0$:

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad \cdots (2)$$

ecuación homogénea. Tenemos 3 casos:

(i) $c^2 > 4mk$ (sobre amortiguado)

$$y(t) = a e^{-|r_1|t} + b e^{-|r_2|t} \qquad \cdots (3)$$

con $r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$

y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frecuencia natural

$a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

(ii) $c^2 = 4mk$ (críticamente amortiguado)

$$y(t) = (\underbrace{a + bt}) e^{-\frac{ct}{2m}} \qquad \cdots (4)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

(iii) $0 \leq c^2 < 4mk$ (subamortiguado)

$$0 < \mu := \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} < \omega_0$$

$$y(t) = \underbrace{R e^{-\frac{c}{2m}t}} \cos(\mu t - \delta) \quad \cdots (5)$$

con $R = \sqrt{a^2+b^2}$, $\delta = \text{Arc}\tan\left(\frac{b}{a}\right)$

Las soluciones (3)-(5) (con $c>0$) satisfacen $y(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

Caso particular: (1) con forzamiento

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad \cdots (6)$$

con $F_0 > 0$, $\omega > 0$ constantes.

El modelo es:

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \quad \cdots (7)$$

Para encontrar una solución particular de (7) aplicamos ansatz del lado derecho:

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$
$$y'(t) = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$$
$$y''(t) = -\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t$$

Sustituyendo en (7):

$$-m\omega^2 \left[A \sin \omega t + B \cos \omega t \right] +$$
$$+ c\omega \left[A \cos \omega t - B \sin \omega t \right] +$$
$$+ k \left[A \sin \omega t + B \cos \omega t \right] = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (k - m\omega^2) A - c\omega B = 0 \\ (k - m\omega^2) B + c\omega A = F_0 \end{array}\right\} \cdots (8)$$

Forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -c\omega \\ c\omega & k - m\omega^2 \end{pmatrix}}_{= M} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = (k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2 > 0$$ ya que $c > 0, \omega > 0$

La solución es:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \left[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2 \right]^{-1} \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & c\omega \\ -c\omega & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{c\omega F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

$$B = \frac{(k-m\omega^2)F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

La solución particular de (7) es:

$$y_p(t) =: \varphi(t)$$

$$= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\left[c\omega \sin \omega t + (k-m\omega^2)\cos \omega t\right]$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad \ldots (9)$$

$$\text{con} \quad \delta = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$$

La solución general de (7) es de la forma:

$$y(t) = \underbrace{\eta(t)}_{\substack{\text{solución gral.} \\ \text{de la homogénea} \\ \text{casos (i), (ii), (iii)}}} + \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\text{sol. particular} \\ \text{de (7),} \\ \text{oscilante}}}$$

$c=0$ periódica

"permanente"

$\rightarrow$ $c>0$, $\eta(t) \to 0$ si $t \to \infty$ "transiente"

Asintóticamente $y(t) \sim \varphi(t)$ cuando $t \to \infty$.

Resonancia

Primero: caso sin amortiguamiento:

$$c = 0.$$

En este caso

$$(1) \Rightarrow \quad my'' + ky = F_0 \cos \omega t \quad \cdots (10)$$

Tenemos dos casos:

(a) $\omega \neq \omega_0$, $\quad \omega > 0, \ \omega_0 > 0$

Aquí $\det M = (k - m\omega^2)^2 > 0$ ya que

$$\omega^2 \neq \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solución particular (9) es:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{|k - m\omega^2|} \cos \omega t \quad \cdots (11)$$

Como $c^2 = 0 < 4mk$ (subamortiguado)
$\therefore$ la solución general de la homogénea (transiente) es

$$\eta(t) = R\cos(\mu t - \delta)$$

$$R = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \delta = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\mu = \omega_0 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

La solución es

$$y(t) = \frac{F_0}{|k - m\omega^2|}\cos\omega t + R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

supongamos que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
En ese caso:

$$y(0) = \frac{F_0}{|k - m\omega^2|} + R\cos\delta = 0$$

$$y'(0) = R\omega_0 \sin\delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 0, \quad R = -\frac{F_0}{|k - m\omega^2|}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{F_0}{|k - m\omega^2|}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)$$

Escribimos

$$k - m\omega^2 = m\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)$$

$$= m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\frac{F_0}{m\,|\omega_0^2 - \omega^2|}}_{\text{amplitud}}\left[\underset{\substack{\downarrow \\ \text{vibración} \\ \text{forzada}}}{\cos \omega t} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vibración} \\ \text{natural}}}{\cos \omega_0 t}\right] \quad \cdots (12)$$

Es crucial que $\omega_0 \neq \omega$.

¿Qué pasa si $\omega \to \omega_0$?

Usando $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$

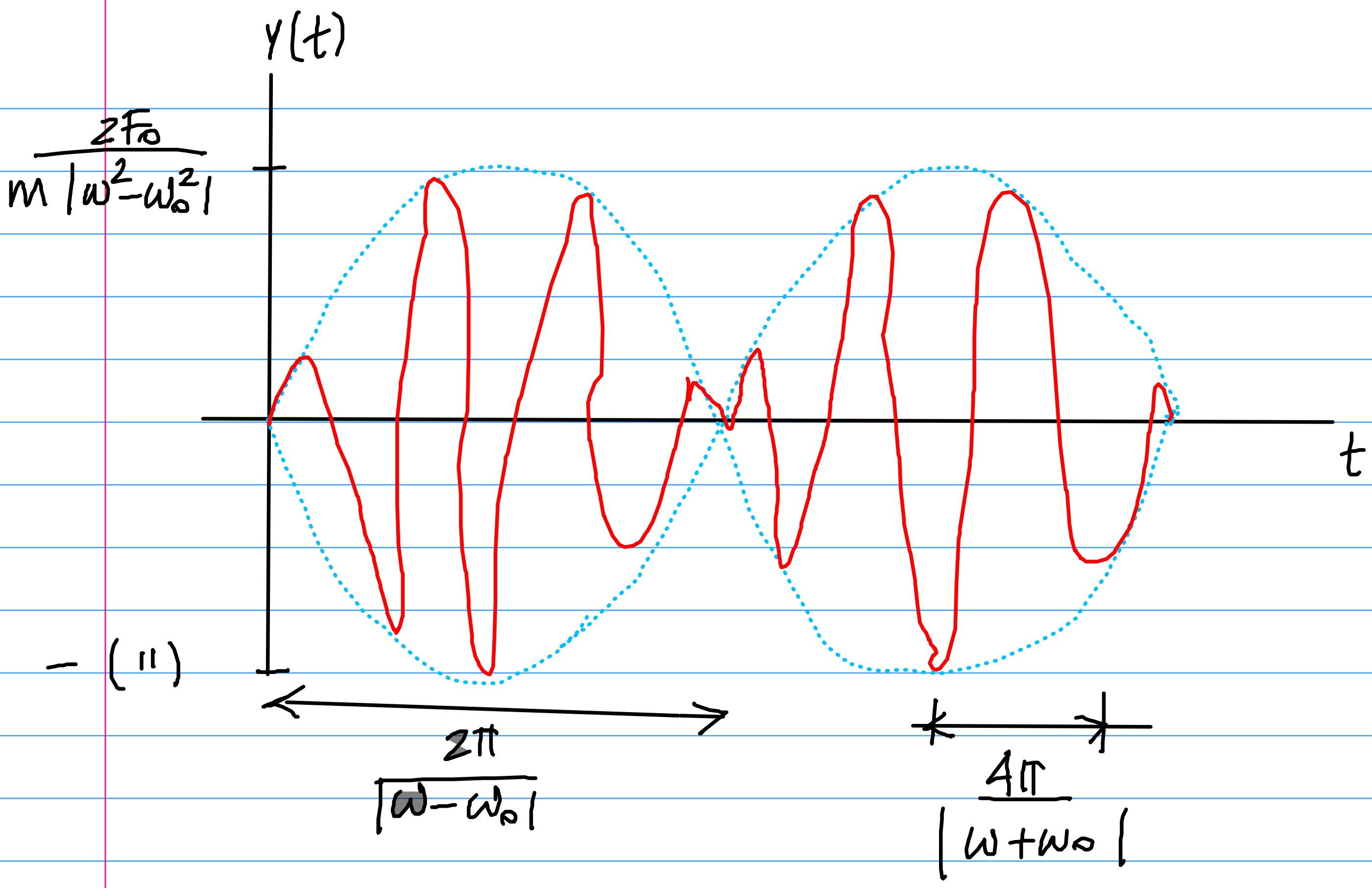
$$(12') \cdots \quad y(t) = \frac{2F_0}{m\,|\omega_0^2 - \omega^2|}\left[\overbrace{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t\right)}^{\text{envolvente}} \times \underbrace{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t\right)}_{\text{ocilación rápida}}\right]$$

Si $\omega \sim \omega_0$ entonces $0 < |\omega - \omega_0| \ll 1$

y el periodo de $\sin\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)t\right]$

es grande comparado con el periodo de

$\sin\left(\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t\right)$.



Amplitud "modulada"

(b) $\omega = \omega_0$

La ecuación a resolver es:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \quad \cdots (13)$$

Mismo transiente:

$$y(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta) \quad \cdots (14)$$

solución particular (ansatz lado derecho):

$$Y(t) = \frac{F_0 t}{2\omega_0 m} \sin \omega_0 t$$

La solución es :

$$y(t) = \underbrace{R\cos(\omega_0 t - \delta)}_{\text{transiente}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{F_0 t}{2\omega_0 m} \sin \omega_0 t}_{} \quad \cdots (16)$$

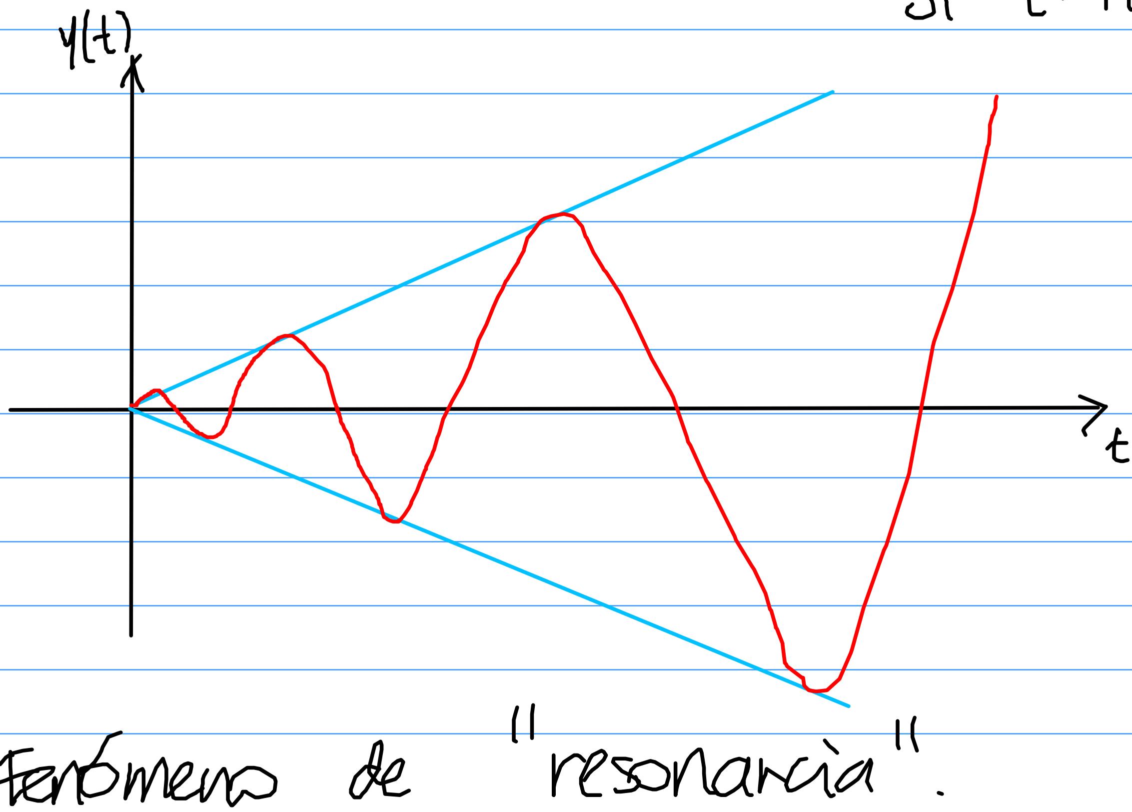
$y(0)=0, \quad y'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{F_0 t}{2\omega_0 m} \sin \omega_0 t$

$\cdots (17)$

(17) ⇒ vibración oscilante, no periódica

tiene una amplitud $\left|\dfrac{F_0 t}{2m\omega_0}\right| \to \infty$

si $t \to \infty$



Fenómeno de "resonancia".

En el caso amortiguado, si $c \sim 0^+$ entonces tenemos que si $\omega \sim \omega_0$ la amplitud no tiende a ∞ pero puede ser desastrosamente grande.