Lección 4.1 : Espacios normados.

Sección 4 : Teoremas de existencia y unicidad

Ecuación lineal, explícita de orden $m > 1$:

$$\frac{d^m y}{dt^m} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t) \frac{d^j y}{dt^j} + b(t) \quad \cdots \quad (1)$$

con $a_j, b \in C(I; \mathbb{R})$, $y = y(t) \in C^m(I; \mathbb{R})$.

Es preciso definir $m > 1$ condiciones iniciales :

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}(t_0) &= y_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

para $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. El problema de Cauchy (1)-(2) se puede escribir como un sistema de primer orden para un vector :

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t) \quad \cdots \quad (3)$$

donde
$$Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

y $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B(t) \in \mathbb{R}^m$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Teorema 1 Sean $A = A(t)$, $B = B(t)$, $A \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C(I; \mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, continuas en $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces para todo $t_0 \in I$, y todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, existe una única solución $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ del problema de Cauchy

$$(4) \cdots \begin{cases} y'(t) = A(t)y + B(t), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

El teorema 1 será corolario de un resultado más general.

Sistema general de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (S)$$

$t_0, t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

$F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función conocida (posiblemente no lineal)

Ejemplos importantes:

(A) Sistema lineal: $F(t,y) = A(t)y + B(t)$

(B) Sistema autónomo: $F = F(y)$.

Objetivo: resolver el problema de cauchy (S) localmente, y de manera única. Extender la solución en $t \in I$ lo más que se pueda.

Espacios normados

Definición Un conjunto de elementos X, sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, con $+: X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, es un espacio lineal (o vectorial), si para cualesquiera elementos, $x, y, z \in \mathfrak{X}$ se tiene :

- $x+y = y+x \in \mathfrak{X}$
- $(x+y)+z = x+(y+z) \in \mathfrak{X}$
- $\exists!\ 0 \in \mathfrak{X}$ tal que $x+0 = 0+x = x$ $\forall x \in \mathfrak{X}$
- $\forall x \in \mathfrak{X}$ $\exists$ $-x \in \mathfrak{X}$ tal que $x+(-x)=0$
- $1 \cdot x = x$ $\forall x \in \mathfrak{X}$, con $1 \in \mathbb{K}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathfrak{X}$ $\alpha \cdot x \in \mathfrak{X}$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathfrak{X}$
  $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, " , "
- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathfrak{X}$

<u>Definición</u> Un espacio lineal $\mathfrak{X}$ es normado si $\exists$ $\|\cdot\| : \mathfrak{X} \longrightarrow [0,\infty)$ tal que :

- $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0$ ssi $x = 0 \in \mathfrak{X}$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathfrak{X}$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall$ $x, y \in \mathfrak{X}$

La distancia entre x y y es : $\|x-y\|$. Notación : $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$.

Ejemplos:

(A) $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathbb{R}$ con valor absoluto.

$\|x\| = |x|$
$\in [0,\infty)$
$\forall x \in \mathbb{R}$

(B) $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \quad \forall\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(C) $(X, \|\cdot\|) = (C([a,b]), |\cdot|_0)$

$-\infty < a < b < \infty$, f continua en $[a,b]$

$$\forall f \in C([a,b]), \quad \|f\| = |f|_0 = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$|\cdot|_0$ es la norma de la convergencia uniforme:

$$|f-g|_0 < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-g(x)| < \varepsilon \quad \underline{\underline{\forall\ x \in [a,b]}}$$

(D) $(X, \|\cdot\|) = (C([a,b]), \|\cdot\|_{L^2})$

Norma L^2: $\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{1/2}$

" L^p: $\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$

$$1 \leq p < \infty$$

Definición Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach (o completo) si toda sucesión de Cauchy en X converge a algún elemento de X en la norma $\|\cdot\|$.

Ejemplos :

(A) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es de Banach (cálculo I)

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ " " (" III)

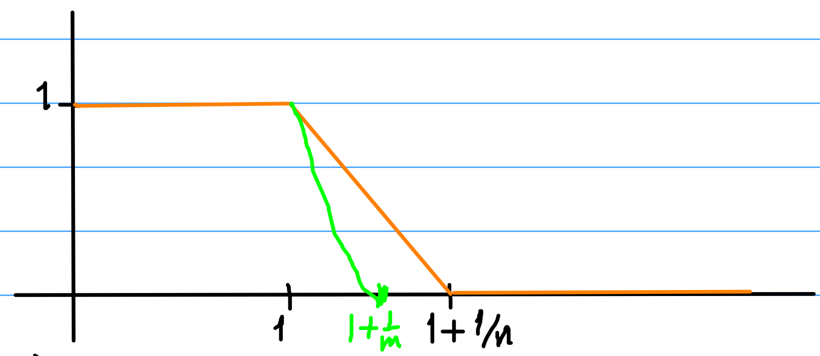
(B) $(C([a,b]; |\cdot|_0)$ es de Banach. (" III)

Observación : $C([a,b])$ no es de Banach en la norma L^2.

contraejemplo : $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(t) := \begin{cases} 1, & t\in[0,1] \\ 1+n(1-t), & t\in\left(1, 1+\frac{1}{n}\right) \\ 0, & t\in\left[1+\frac{1}{n}, \infty\right) \end{cases}$$

$=$



$f_n \in C([0,\infty)) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Claramente $f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

discontinua.

Sin embargo, la suceción es de Cauchy en la norma L^2.

Sea $m \geq n$ $\quad (|f_n| \geq |f_m|)$

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} = \int_1^{1+1/n} |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, dt$$

$$\leq 4 \int_1^{1+1/n} |f_n(t)|^2 \, dt$$

$$= 4 \int_1^{1+1/n} (1 + n(1-t))^2 \, dt$$

$u = 1+n(1-t)$

$$= \frac{4}{n} \int_0^1 u^2 \, du$$

$$= \frac{4}{3n} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$