Lección 4.2 : El teorema de punto fijo de Banach. Iteraciones de Picard.

Definición Sea $S \subset X$ un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que x es un punto límite de S si existe una sucesión en S, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ que converge a x en X, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Se dice que S es cerrado si contiene a todos sus puntos límite.

Definición Sea $T : X \to X$, un mapeo en $(X, \|\cdot\|)$ de Banach tal que T mapea S en S, es decir, $Tx \in S$ $\forall\, x \in S$, con $S \subset X$. T es una contracción en S si

$$\|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\| \qquad \dots (1)$$

para cualesquiera $x, y \in S$, con $0 < K < 1$.

Teorema (de punto fijo de Banach)

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $S \subseteq X$ un subconjunto cerrado y $T : X \to X$ una contracción en S.

Entonces existe un único punto fijo de T en S, es decir,

$\exists! \; x_* \in S$ tal que $Tx_* = x_*$

Demostración: Sea $x_0 \in S$, arbitrario.

Definimos la sucesión:

$$x_n := T x_{n-1} \quad \forall \, n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

T mapea S en S

$$\Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$$

sucesión en S.

(2) son las iteradas de Picard.

Sea $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces $m = n + p$ para cierto $p \geq 1$.

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\|$$

Por probar:

$$(3) \ldots \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq K^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Por inducción: $n=1$, claramente

$$\|x_2 - x_1\| = \|Tx_1 - Tx_0\|$$

$$\leq K \|x_1 - x_0\|$$

T contracción

$n \Rightarrow n+1$:

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|Tx_{n+1} - Tx_n\|$$

$$\leq K \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq K^{n+1} \|x_1 - x_0\| \quad ✓$$

Así, para $m > n$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\|$$

(3)

$$\leq \sum_{j=1}^{p} K^{n+j-1} \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{m} K^i$$

$$= \|x_1 - x_0\| \left(\frac{K^m}{1-K}\right) \longrightarrow 0$$

si $m \to \infty$ ya que

$0 < K < 1$.

$\therefore \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ es de Cauchy en $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$

$\therefore \quad \exists \; x_* \in \mathfrak{X}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$.

$\{x_n\} \subset S$, S cerrado $\Rightarrow$ $x_* \in S$.

Claramente

$$\| T x_{n+1} - x_* \| = \| x_n - x_* \| \to 0$$
si $n \to \infty$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} T x_n = x_*$$

Por lo tanto,

$$\| T x_* - x_* \| \leq \| T x_* - T x_n \| + \| T x_n - x_* \|$$
$$\leq K \underbrace{\| x_* - x_n \|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\| x_{n+1} - x_* \|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

si $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad T x_* = x_* \quad \therefore \quad x_* \in S$ es un punto fijo de T.

4

Unicidad: sea $y \in S$ tal que

$$Ty = y.$$

Entonces,

$$0 \leq \| x_* - y \| = \| Tx_* - Ty \|$$
$$\leq K \| x_* - y \|$$

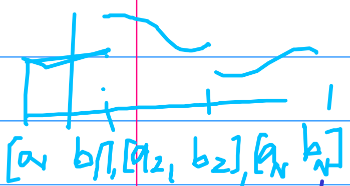
Si $\| x_* - y \| > 0$ entonces $K > 1$ (contradicción).

$$\therefore \quad x_* = y$$

$\square$

Lema (4)... El espacio de funciones

$$C(I) = \{ f(t) \in \mathbb{R}^n : f \text{ es continua en } I = [a,b] \subset \mathbb{R} \}$$



es de Banach en la norma

$$|f|_0 = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Demostración: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy:

$$|f_n - f_m|_0 = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

si $m,n \geq N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\quad \forall \varepsilon > 0.$

$\therefore$ $\forall\ t \in [a,b]$ <u>fijo</u> la sucesión en $\mathbb{R}^n$

$$\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy, $\therefore$ convergente

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \qquad \forall\ t \in I \text{ fijo.}$$

f es continua:

Sea $t_0 \in I$. Entonces

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)|$$

x conv. uniforme dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall\ n \geq N$, $\forall\ t \in I$

Por continuidad de f_N existe

$$\delta = \delta(\varepsilon, t_0, N) > 0$$

tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f_N(t) - f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto,

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(t) - f_N(t_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \varepsilon \qquad \text{si } |t - t_0| < \delta$$

$\therefore$ $f(t)$ es continua.

$\therefore$ $(C(I); |\cdot|_0)$ es de Banach

$\square$

<u>Definición</u> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto.
Una función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz en Ω si $\exists$ $L > 0$ constante tal que

$$|F(X) - F(Y)| < L|X - Y| \quad \cdots (5)$$

$\forall$ $X, Y \in \Omega$. $L > 0$ es la constante de Lipschitz de F en Ω.

Teorema de Picard

Sean:
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto
- $y_0 \in \Omega$ arbitrario
- $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto
- $t_0 \in I$
- $F \in C(\mathbb{R} \times \Omega ; \mathbb{R}^n)$, tal que

F restringida a un rectángulo

(6) ... $R = \{ (t,y) \in I \times \Omega : |t - t_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b \}$

con $a, b > 0$, F es continua en R y Lipschitz en la variable y:

$$|F(t,y) - F(t,x)| \leq L\,|x - y|$$

$\forall \ (t,y), (t,x) \in R$, $L > 0$ constante.

Entonces $\exists \ \alpha > 0$ tal que el problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= F(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

tiene solución única, diferenciable $y \in C^1(I_\alpha ; \mathbb{R}^n)$ en una vecindad de t_0: $I_\alpha = \{ |t - t_0| < \alpha \} \subset \{ |t - t_0| < a \}$