Lección 4.3 : El teorema de existencia y unicidad (Picard).

Teorema de Picard (existencia y unicidad)

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $Y_0 \in \Omega$ dado. Tomemos $I \subset \mathbb{R}$ abierto con $t_0 \in I$. Sea $F \in C(\mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ continua tal que, F restringida a un rectángulo

$$(1) \ldots \quad R = \{(t,y) \in I \times \Omega \; : \; |t - t_0| \leq a, \; |y - y_0| \leq b\}$$

con $a, b > 0$ es continua en R y Lipschitz continua en la variable y en R, es decir,

$$(2) \ldots \quad |F(t,y) - F(t,x)| \leq L|x - y|$$

para todo par $(t,x), (t,y) \in R$, con $L > 0$ constante.

Entonces existe $\alpha > 0$ tal que el problema de Cauchy

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución diferenciable, $y = y(t)$, $y \in C^1(I_\alpha; \mathbb{R}^n)$ en el intervalo

$$(4) \ldots \quad I_\alpha = \{ t \in I \; : \; |t - t_0| < \alpha \}$$

$$\subset I_a := \{ |t - t_0| < a \}.$$

Demostración Sea $0<\alpha<a$, arbitraria, que escogeremos más adelante. Sea el espacio de Banach

$$\mathbb{X} = C(I_\alpha ; \mathbb{R}^n)$$
$$= \{ y = y(t) \in \mathbb{R}^n, \ t \in I_\alpha, \ y \text{ es continua en } \bar{I}_\alpha \}$$

con norma $\|y\| = |y|_0 = \max_{t \in \bar{I}_\alpha} |y(t)|$

Sea el conjunto

$$S = \{ y \in \mathbb{X} \ : \ |y - y_0|_0 \leq b \}$$

para cierto $b>0$.

Sea $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cauchy en S:

$$|y_n - y_m|_0 = \max_{t\in \bar{I}_\alpha} |y_n(t) - y_m(t)| < \varepsilon$$

$$\forall n,m \geq N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

$(C(I_\alpha), |\cdot|_0)$ es de Banach

$$\Rightarrow \quad \exists \ y = \lim_{m\to\infty} y_m , \qquad y \in C(I_\alpha ; \mathbb{R}^n)$$

Vamos a verificar que $y \in S$.

Para $m \geq N(\varepsilon/2)$ tenemos que

$$|y - y_0|_0 \leq |y - y_m|_0 + |y_m - y_0|_0$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + b$$

$y_m \in S$

Esto es cierto $\forall \varepsilon > 0$. Tomando lím cuando $\varepsilon \to 0^+$:

$$|y - y_0|_0 \leq b$$

es decir, $y \in S$ $\therefore$ S es cerrado en $(X, |\cdot|_0)$

Definimos ahora

$$(5)\ldots \begin{cases} T : S \longrightarrow X \\ Ty := y_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, y(\xi))\, d\xi \end{cases}$$

$$\forall y \in S$$

T mapea S en S si $0 < \alpha \ll 1$ es suficientemente pequeño.

Sea $\infty > M := \max\limits_{(t,y) \in R} |F(t,y)| > 0$

Seleccionamos

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\} \quad \cdots \quad (6)$$

Así,

$$|Ty - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} F(\xi, y(\xi))\, d\xi \right|$$

$$\leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

$\Rightarrow \quad |Ty - y_0|_0 \leq b$

$\Rightarrow \quad Ty \in S$ siempre que $y \in S$.

$\therefore \quad T : S \to S$

T es una contracción en S:

Sean $y_1, y_2 \in S$; entonces

$$|Ty_1 - Ty_2| \leq \int_{t_0}^{t} |F(\xi, y_1(\xi)) - F(\xi, y_2(\xi))|\, d\xi$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y_1(\xi) - y_2(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq L|t - t_0| \max_{\xi \in I_\alpha} |y_1(\xi) - y_2(\xi)|$$

$$\leq L\alpha\, |y_1 - y_1|_0$$

$$\Rightarrow \max_{t \in I_\alpha} |Ty_1(t) - Ty_2(t)|$$

$$= |Ty_1 - Ty_2|_0$$

$$\leq L\alpha |y_1 - y_2|_0$$

$$< |y_1 - y_2|_0$$

$\therefore$ T es una contracción.

Por el teorema de punto fijo de Banach, T tiene un único punto fijo en S :

$$\exists \quad \hat{y} \in C(I_\alpha ; \mathbb{R}^n)$$

$$\hat{y} \in S$$

y $T\hat{y} = \hat{y}$, es decir,

$$\hat{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, \hat{y}(\xi))\, d\xi.$$

Además, $\hat{y} \in C^1(I_\alpha ; \mathbb{R}^n)$ con

- $\dfrac{d\hat{y}}{dt} = F(t, \hat{y}(t))$
- $\hat{y}(t_0) = y_0$

$\square$

Observaciones :

(a) Aquí las iteradas de Picard son

$$y_0(t) := y_0$$

$$y_n(t) = (Ty_{n-1})(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi$$

(b) Si no suponemos F Lipschitz en la variable y entonces podemos perder unicidad. Contraejemplo :

Sea $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, ec. escalar ($n=1$)

en $I = [0, \infty)$

Claramente $y(t) \equiv 0$ es solución.
Pero también $y(t) = \frac{1}{4}t^2$ es solución :

$$y' = \frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \sqrt{|y|}$$

Aquí, $F(t,y) = \sqrt{|y|}$ no es Lipschitz continua en y cerca de $y=0$:

$$\left|\frac{F(0,y)-F(0,0)}{y}\right| = \frac{\sqrt{|y|}}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$$

NO es acotado en ningún rectángulo a $y=0$.

Otro contraejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 3y^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (n=1)$$

Por separación de variables

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = 3\,dt \Rightarrow 3y^{1/3} = 3t + C$$

$$\therefore\ y(t) = t^3 \text{ es solución.}$$

Pero, $y(t) \equiv 0$ también es solución.

$F(t,y) = 3y^{2/3}$ no es Lipschitz continua cerca de $y=0$.

(c) Ejemplos de iteraciones de Picard:

Sea $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad (n=1)$

con solución $y(t) = y_0 e^t$.

$$F(t,y) = y.$$

Iteraciones:

$$y_0(t) = y_0$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_0^t y_0 \, d\xi = y_0(1+t)$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_0^t y_0(1+\xi)\, d\xi = y_0\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y_0\left(1+t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3!}t^3+\dots+\frac{1}{n!}t^n\right)$$

$$= y_0 \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \longrightarrow y_0 e^t \quad \text{si } n \to \infty.$$

Existe $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Picard $\Rightarrow$ $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$

$$F(t,y) = y$$

R compacto, $R = \{|t| \leq a,\ |y - y_0| \leq b = a\}$

$\Rightarrow$ $a = b < \infty$.

$L = 1$, $M = \max_{R} |y| = a$.

$\therefore$ $\min\left\{a, \frac{a}{M} = 1, 1\right\} = 1$