Lección 4.4 : Teorema de existencia y unicidad (continuación). Soluciones globales.

Lema 1 (Cálculo III)

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en Ω. Entonces f satisface una condición de Lipschitz local.

Corolario Si $F = F(t,y)$ y $\nabla_y F(t,y)$ son continuas en

$$R = \{ |t - t_0| \le a, \ |y - y_0| \le b \}$$

entonces basta con tomar

$$0 < \alpha \le \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \cdots (1)$$

con $M = \max_R |F(t,y)|$ en la demostración del teorema de Picard.

Demostración La convergencia se prueba directamente con las iteradas de Picard

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi \\ y_0(t) &:= y_0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Sea $\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Tomamos

$t \in I_\alpha := \{ |t-t_0| < \alpha \}$. Entonces,

$$y_n(t) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1})$$

converge ssi la serie converge. Por probar:

$$\forall t \in I_\alpha \qquad |y_n(t) - y_0| \le M|t-t_0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \cdots (3)$$

Por inducción: $n=1$.

$$|y_1(t) - y_0| \le \int_{t_0}^{t} |F(\xi, y_0)| \, d\xi$$

$$\underset{(\xi, y_0) \in R}{\le} M|t-t_0| < M\alpha \le b$$

Suponiendo (3) para $n-1$:

$$|y_n(t) - y_0| \le \int_{t_0}^{t} |F(\xi, y_{n-1}(\xi))| \, d\xi$$

$$\underset{(\xi, y_{n-1}(\xi)) \in R}{\le} M|t-t_0| < b$$

Es decir, $(y_n(t), t) \in R \quad \forall t \in I_\alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

De este modo:

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |F(\xi, y_{n-1}(\xi)) - F(\xi, y_{n-2}(\xi))| d\xi$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |\nabla_y F(\xi, z)| \, |y_{n-1}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| \, d\xi$$

$(\xi, y_{n-1}(\xi))$
$(\xi, y_{n-2}(\xi))$ $\in R$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| \, d\xi \quad \cdots (4)$$

con $L = \max_R |\nabla_y F| > 0$, si $|t - t_0| < \alpha \leq a$.

Para $n = 2$:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |y_1(\xi) - y_0| \, d\xi$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} LM \, |t - t_0| \int_{t_0}^{t} d\xi$$

$$= \frac{LM}{2} (t - t_0)^2$$

$$\leq \frac{1}{2!} LM \alpha^2$$

$n = 3$: $$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \frac{1}{3!} L^2 M |t - t_0|^3$$

$$\leq \frac{1}{3!} M L^2 \alpha^3$$

$\vdots$

$n \in \mathbb{N}$: $$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{1}{n!} M L^{n-1} \alpha^n$$

(se prueba por inducción)

Así,

$$\sum_{k=1}^{n} |(y_k - y_{k-1})(t)| \leq \frac{M}{L}\left[\alpha L + \frac{\alpha^2 L^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n L^n}{n!}\right]$$

$$\leq \frac{M}{L}\left(e^{\alpha L} - 1\right)$$

convergente si $n \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t) \quad \text{convergente.}$$

Si acotamos,

$$\left| \int_{t_0}^{t} F(\xi, y(\xi))\, d\xi - \int_{t_0}^{t} F(\xi, y_n(t))\, d\xi \right|$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |y(\xi) - y_n(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq M\alpha \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

$$\cdots (5)$$

Concluimos que

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, y(\xi))\, d\xi$$

$\square$

Aplicaciones:

(A) Probar que la solución a la ecuación escalar

$$(6) \cdots \begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2} =: F(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

existe para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, es única, y además $|y(t)| \leq 1$ $\forall\, t \in [0, \frac{1}{2}]$.

Escogemos el rectángulo <u>a priori</u>

$$R = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq \tfrac{1}{2}, \; |y| \leq 1 \}$$

es decir, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$
$a = \frac{1}{2} > 0$, $b = 1 > 0$.

$F(t,y) = t^2 + e^{-y^2} \in \mathcal{C}^1(R)$.

$F_y(t,y) = -2y e^{-y^2}$ acotada en R.

$$M := \max_{(t,y) \in R} \left(t^2 + e^{-y^2} \right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}.$$

Por el corolario y por Picard, $\exists!$ solución en

$$t \in I_\alpha = \{ |t| < \alpha \},$$

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Concluimos: la solución $\exists$, es única en $|t| < \frac{1}{2}$ y además

$(t, y(t)) \in R$ ssi $|t| < \frac{1}{2}$.

es decir, $|y(t)| \leq 1$.

(B) Probar que la solución de la ecuación escalar

$$\left.\begin{array}{l} y' = e^{-t^2} + y^3 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} (7)$$

existe para $|t| \leq \frac{1}{9}$, es única, y que en ese intervalo $0 \leq y(t) \leq 2$.

Sea $R = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq \frac{1}{9}, |y-1| \leq 1 \}$

$\hspace{30em} b$

$|y-1| \leq 1 \iff 0 \leq y \leq 2$

Así $a = \frac{1}{9}$, $b = 1$, $y_0 = 1$.

Claramente $F(t,y) = e^{-t^2} + y^3 \in C^1(R)$

$$F_y(t,y) = 3y^2$$

son continuas en R.

$$\therefore \quad M = \max_{R} \left| e^{-t^2} + y^3 \right| = 1 + 2^3 = 9$$

$$\therefore \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right\} = \frac{1}{9}$$

La solución de (7) existe en $|t| \leq \frac{1}{9}$ es única y satisface $0 \leq y(t) \leq 2$ $\forall\, |t| \leq \frac{1}{9}$.

Nota: si hacemos R más grande en algunos casos M es más grande y por ende, α es más pequeño.

¿Cómo extender realmente el intervalo I_α?

Soluciones globales

Limitación del teorema de Picard: la $\exists$ de la solución es local.

Hipótesis: sea $D = I \times \Omega$

$$= \{ (t, y) : t \in I = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R},\ y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \}$$

I abierto, Ω abierto, tal que

F es de clase C^1 en D.

Sean α, β tales que $[\alpha, \beta] \subset I$.
Llamamos a $y = y(t) \in C^1([\alpha, \beta]; \Omega)$ solución de $y' = F(t, y)$ una solución local.

Gráfica de la solución local:

$$\Upsilon := \{ (t, y(t)) \in I \times \Omega = D : t \in [\alpha, \beta] \subset I, \ y(t) \in \Omega \}$$

Claramente $\Upsilon \subset D$.

Decimos que $(\tau, \xi) \in \Upsilon$ si

$$\tau \in [\alpha, \beta] \quad y \quad y(\tau) = \xi$$

Observaciones:

(I) Todo punto de D pertenece a alguna gráfica Υ de una solución local.

Demostración: Sea $(\tau, \xi) \in D$. Por el teorema de Picard (dado que

F es de clase C^1 en $\mathcal{D}$) podemos encontrar un rectângulo

$$R = \{ (t,y) : |t-\tau| \leq a, \ |y-\xi| \leq b \}$$

y un intervalo $I_\alpha = \{ |t-\tau| < \alpha \}$ con $\alpha > 0$ tal que $I_\alpha \subset I_a = \{ |t-\tau| < a \}$ donde existe una única solución $y = y(t)$ de

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

$\therefore$ (τ, ξ) pertenece a una gráfica $\square$