Lección 4.5 : Soluciones globales (continuación).

$$\mathcal{D} = I \times \Omega = \left\{ (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : \begin{array}{l} y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ t \in I = (t_1,t_2) \subset \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$F \in C^1(\mathcal{D})$ $\qquad I = (t_1,t_2)$ abierto

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Sean α, β tales que $[\alpha,\beta] \subset I$.
Llamamos $y = y(t)$ con $t \in [\alpha,\beta]$ una solución local de $y' = F(t,y)$.

Gráfica:

$$\Upsilon := \left\{ (t, y(t)) \in I \times \Omega : \begin{array}{l} t \in [\alpha,\beta] \\ y(t) \in \Omega \end{array} \right\}$$

$\Upsilon \subset \mathcal{D}$.

Decimos que $(\tau, \xi) \in \Upsilon$ si $\tau \in [\alpha,\beta]$ y $\xi = y(\tau)$.

Observaciones:

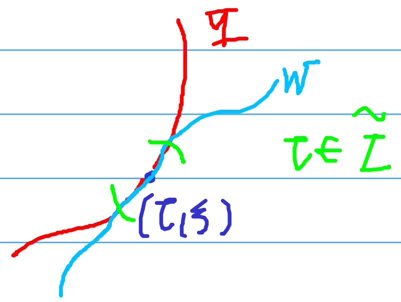
(I) Todo punto de $\mathcal{D}$ pertenece a alguna gráfica Υ de una solución local.

Demostración: clase pasada.

(II) Sean $\Upsilon = \{(t, y(t))\} \subset D$
$W = \{(t, w(t))\} \subset D$

las gráficas de dos soluciones locales en D. Si $(\tau, \xi) \in \Upsilon \cap W$ entonces $y(t) \equiv w(t)$ para todo t en un intervalo $\tilde{I}$ que contiene a τ.

<u>Dem</u>. consecuencia inmediata del teorema de Picard (unicidad).



(III) Mismas gráficas. Si $(\tau, \xi) \in \Upsilon \cap W$ entonces $y(t) \equiv w(t)$ para todo t en la unión de los intervalos de definición de $y(t)$ y de $w(t)$.

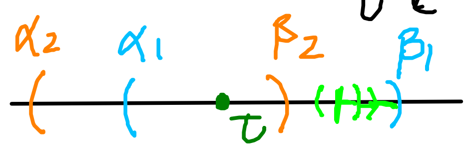
Demostración: Sean

$I_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ intervalo de $\exists$ de Υ

$I_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ " " " W

Para ambos intervalos

$\tau \in I_j, \quad j = 1, 2$



Sea $I = (\alpha, \beta) = \bigcup_{j=1,2} (\alpha_j, \beta_j)$

Probaremos que $w(t) = y(t) \ \forall \ t \in [\tau, \beta)$ (la demostración para $t \in (\alpha, \tau]$ es análoga).

Definimos:

$$(1) \ldots \quad \theta := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \tau < t < \beta \text{ y} \\ y(t) \neq w(t) \end{array} \right\}$$

El conjunto está acotado inferiormente por $t = \tau$, ya que $y(\tau) = w(\tau) = \xi$.

Por contradicción, supongamos que

$$\theta < \beta.$$

Por definición de θ, $y(t) = w(t) \ \forall \ \tau \leq t < \theta$

Tomando el límite cuando $t \to \theta^-$, por la continuidad de y y de w:

$$y(\theta) = w(\theta) = \lim_{t \to \theta^-} y(t) = \lim_{t \to \theta^-} w(t)$$
$$=: \widehat{y_0}$$

Aplicamos el teorema de Picard con

condición inicial $y(\theta) = \hat{y}_0$ para $t \geq \theta$.
Así, $\exists\ \hat{\alpha} > 0$ tal que la solución existe y es única para todo

$$\theta \leq t < \theta + \hat{\alpha}$$

Por unicidad de la solución $y(t) = w(t)$ $\forall\ t \in [\theta, \theta + \hat{\alpha})$ con $\hat{\alpha} > 0$. contradicción con la definición de θ. concluimos que $\theta = \beta$.

$\square$

Basándonos en las observaciones (I)-(III) sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las soluciones locales que pasan por $(\tau, \xi) \in \Upsilon$, para toda $\Upsilon \in \mathcal{S}$. Es decir,

$$\mathcal{S} := \left\{ \Upsilon \text{ gráfica} : \begin{array}{l} (\tau, \xi) \in \Upsilon \\ (\tau, \xi) \in \mathcal{D} \end{array} \right\}$$

Por el teorema de Picard

$$\mathcal{S} \neq \phi \quad \text{(no vacío)}.$$

Sea $$I_* := (\alpha, \beta) := \bigcup_{\Upsilon \in \mathcal{S}} \tilde{I}_\Upsilon$$
la unión de todos los intervalos de existencia $\tilde{I}_\Upsilon$ de cada solución local cuya gráfica $\Upsilon \in \mathcal{S}$.

I_* es la unión de intervalos abiertos
$\Rightarrow$ intervalo abierto.

Por la observación (III) toda solución local está determinada por una única función $Y = Y(t)$, $t \in I_*$.

Denotamos $\mathfrak{z}(t) := Y(t)\big|_{t \in I_*}$

es la unión de todos los valores que toma $Y(t)$ en Ω en el intervalo $t \in I_*$.

(III) $\Rightarrow$ $\mathfrak{z}(t)$ es una función de $t \in I_*$, está definida de manera única.
$\mathfrak{z}(t)$ satisface la ecuación diferencial en $t \in I_*$ y $(\tau, \mathfrak{z}(\tau)) = (\tau, Y(\tau))$
$= (\tau, \xi)$.

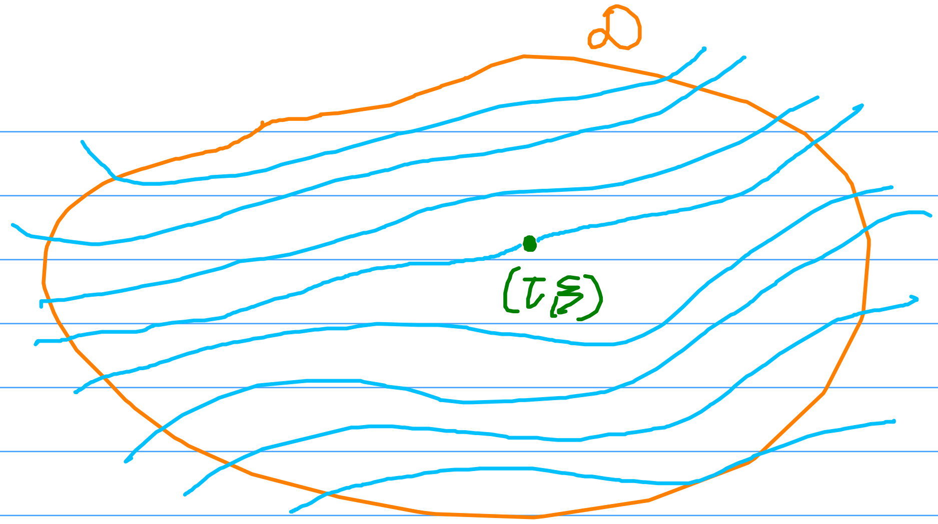
I_* = intervalo máximo de existencia de la solución.

La solución global es la gráfica

$$Z := \{ (t, \mathfrak{z}(t)) : t \in I_* \}$$

definida $\forall\, t \in I_* = \{ t \in \mathbb{R} : -\infty \leq \alpha < t < \beta \leq \infty \}$

toda solución que pasa por $(\tau, \xi) \in \Omega$ es una restricción de Z.



Dado que $(\tau,\xi) \in \mathcal{D}$ es arbitrario, el conjunto $\mathcal{D}$ está lleno de curvas solución que no se intersecta.

Hemos probado el siguiente:

<u>Teorema</u> Para cualquier dominio abierto

$$\mathcal{D} = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

tal que $F \in C^1(\mathcal{D})$ se tiene que:

para cualquier $(\tau,\xi) \in \mathcal{D}$ arbitrario existe una única solución global de

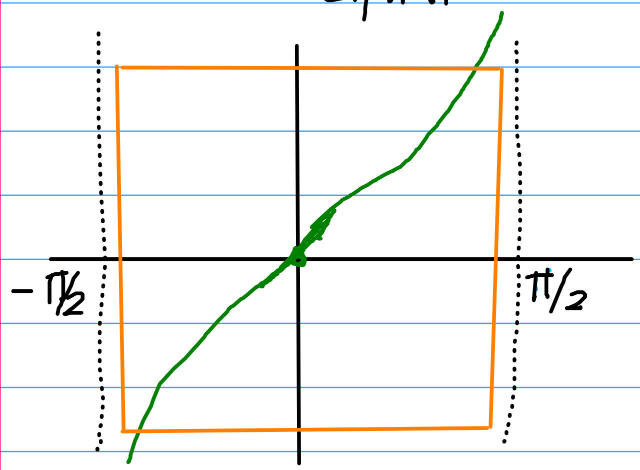
$$\left.\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(\tau) &= \xi \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

en un intervalo máximo de existencia $I_* = (\alpha,\beta)$, con $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ y con gráfica $Z = \{(t,y(t)) : t \in I_*\} \subset \mathcal{D}$.

Ejemplo: sea la ecuación

$$y' = 1 + y^2 \quad = F(t,y)$$
$$y(0) = 0$$

La única solución $y(t) = \tan t$ está definida en $t \in (-\pi/2, \pi/2)$



$$I_* = (\alpha, \beta)$$
$$= (-\pi/2, \pi/2)$$

Proposición Sea D_* un subconjunto cerrado y acotado (compacto) de $D = I \times \Omega$. ($D_* \subset\subset D$).

Si para la gráfica $Z = \{(t, y(t)) : t \in I_* = [\alpha, \beta]\} \subset D$

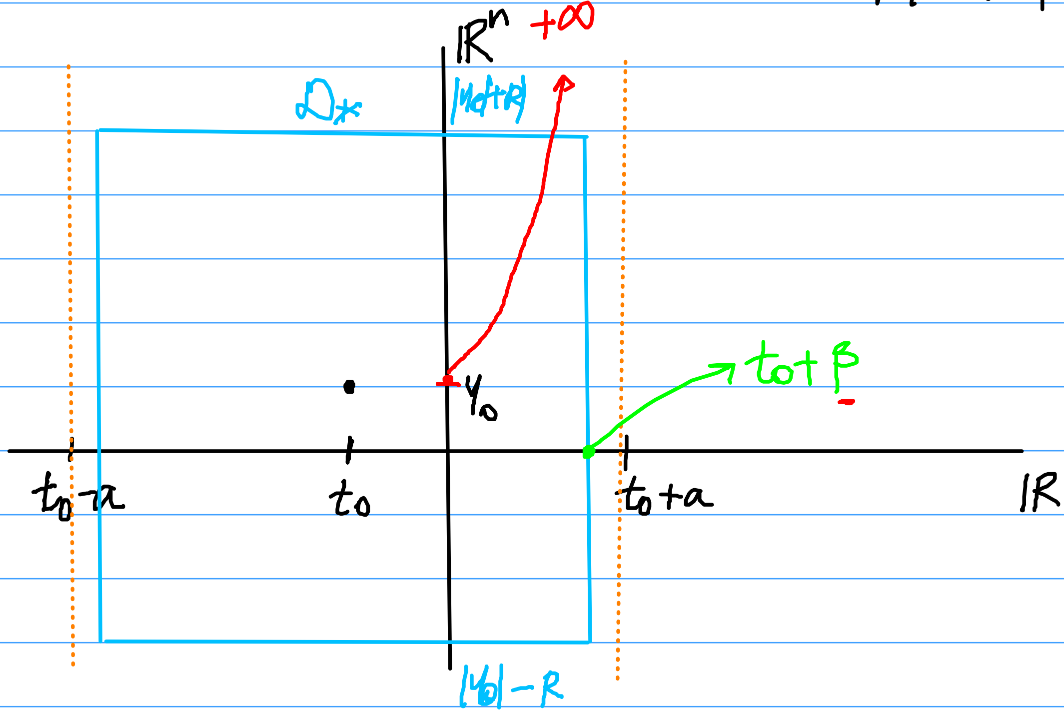
se tiene que $\beta < \infty$ entonces Z se sale de D_*, es decir, existe $\varepsilon_* > 0$ tal que si $t \in (\beta - \varepsilon_*, \beta)$ entonces $(t, y(t)) \notin D_*$.

Nota: esto sucede para cualquier compacto D_*.

Ejemplos:

(A) Si $\mathcal{D}$ es una banda abierta

$$\mathcal{D} = \{ (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a < \infty$$
$$|y - y_0| < \infty \}$$



Supongamos que $\beta < \infty$ y además escogemos $a > 0$ tal que $\beta < t_0 + a$. Para cualquer $R > 0$ sea el compacto

$$\mathcal{D}_* = \{ |t - t_0| \leq \beta + t_0 < a,$$
$$|y - y_0| \leq R \}$$

Claramente $\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}$. Por la proposición si $t \to \beta^-$ entonces

$$|y(t) - y_0| > R$$

Es decir, la solución "explota"

$|y(t)| \to \infty$ (ya que $R>0$ arbitrario).