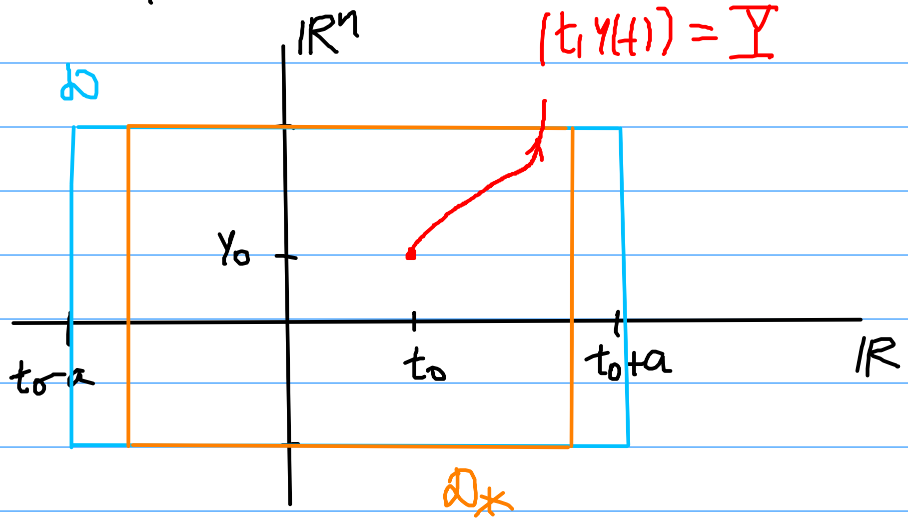
Lección 4.6 : Soluciones globales (continuación). Cotas a priori.

(B) Sea $\mathcal{D}$ un rectángulo abierto, acotado

$$\mathcal{D} = \{ (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \ |y - y_0| < b \}$$

con $a, b > 0$.



Suponiendo que $\beta < \infty$ con $\beta < t_0 + a$. Entonces sea el compacto

$$\mathcal{D}_* = \{ |t - t_0| \leq \beta, \ |y - y_0| \leq b \}$$

Si $t \to \beta^-$ entonces la solución se "escapa" por la parte de la frontera $|y(t) - y_0| = b$ (de $\partial \mathcal{D}_*$); fuera de ésta la solución no está definida.

Lema (cotas a priori)

Supongamos que es posible establecer una cota a priori para la solución de $y' = F(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ de la forma

$$|y(t)| \leq C$$

con $C>0$ uniforme. Entonces la solución global existe $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración Sea

$$D_* = \{ (t,y) : |t-t_0| \leq a, \ |y-y_0| \leq 2C \}$$

con $a>0$ y $C>0$ la cota uniforme a priori.

Sea (α,β) el intervalo máximo de existencia de la solución tal que $\{ |t-t_0| \leq a \} \subset (\alpha,\beta)$.

Supongamos que $\beta < \infty$. Por la proposición la gráfica de la solución global se se sale de D_*. Esto significa que

- $t > a+t_0$

ó,

- $|y(t) - y_0| > 2C$

para algún punto de la gráfica.

En el segundo caso tenemos una contradicción con la cota a priori

$$|y(t)| + |y(0)| = |y(t)| + |y_0| \leq 2C$$

En el primer caso, basta con escoger a de manera que $a + t_0 = \beta < \infty$ $\therefore$ $t > \beta$. contradicción con la definición del intervalo máximo de existencia. Concluimos que $\beta = \infty$. Que $\alpha = -\infty$ es análogo

$\square$

Ejemplos:

(A) Sea la ecuación escalar

$$(1) \ \dots \begin{cases} y'' + y + y^3 = 0 \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \\ y'(t_0) = y_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Demostrar que la solución de (1) existe $\forall t \in \mathbb{R}$.

El problema (1) es equivalente a un sistema en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y^3 - y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} w_1 = y \\ w_2 = y' \end{array} \qquad w' = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1^3 - w_1 \end{pmatrix}$$

$$= F(w) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Por el teorema de Picard $\Rightarrow \exists$ solución local

$\Rightarrow \exists$ solución global con $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervalo máximo de existencia.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in C^1((\alpha, \beta); \mathbb{R}^2)$$

$$\Rightarrow \quad y \in C^2((\alpha, \beta); \mathbb{R})$$

La ecuación (1) tiene una primitiva:

$$\Phi(y, c) = (y')^2 + y^2 + \frac{1}{2} y^4 - c = 0$$

con $c \in \mathbb{R}$ constante.

En efecto,

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(y(t), c)\right) = 2y'y'' + 2yy' + 2y^3y'$$

$$= 2y'(y'' + y + y^3) = 0$$

Para $y_0 = y(0)$, $y_1 = y'(0)$ dados la constante es

$$C = C(y_0, y_1) =: C_0 \equiv y_1^2 + y_0^2 + \frac{1}{2} y_0^4$$

Tenemos así una cota a priori,

$$\left| \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{y(t)^2 + y'(t)^2} \leq \sqrt{2C_0}$$

Por el lema la solución existe $\forall$ $t \in (-\infty, \infty)$.

(B) Sea la ecuación :

$$\left.\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \dots (2)$$

¿Existe solución $\forall\, t \in \mathbb{R}$?

Multiplicando por y' :

$$0 = y'y'' + y' \sin y = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} y'^2 - \cos y\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} y'(t)^2 = \cos y + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

$$C = C_0 = \frac{1}{2} y'(0)^2 - \cos(y(0))$$

$$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2} y'(t)\right|^2 = \left|\cos y(t) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |y'(t)| \leq \sqrt{3} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

cota a priori.

$$|y(t)| = \left|\int_0^t y'(\xi)\, d\xi\right| \leq \sqrt{3}\, t$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} |y'(t)| \leq \sqrt{3} \\ |y(t)| \leq \sqrt{3}\, t \end{array}\right\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por el teorema de Picard la solución de (2) $\exists$ y es única en un intervalo máximo de existencia $(\alpha, \beta) \ni t$

Sea $D_* = \left\{ (t, y, y') \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} |y| \leq \sqrt{3}\, T \\ |y'| \leq \sqrt{3} \\ |t| \leq T \end{array} \right\}$

para $T > 0$ arbitrario.

D_* es compacto.

Por contradicción, suponemos que $\beta < \infty$. Como $T > 0$ es finito pero arbitrario tomemos

$$T := \beta > 0.$$

Si $t \to T^-$ entonces la solución se sale de D_*. Dado que $|y| \leq \sqrt{3}\, T$ y $|y'| \leq \sqrt{3}$ son cotas a priori, la solución "escapa" de D_* por los "lados de D_*" $t > T$.

¡contradicción con definición de β.

Concluimos que $\beta = \infty$. Misma prueba para $\alpha = -\infty$.

$\therefore$ la solución existe $\forall t \in \mathbb{R}$.