Lección 4.7 : Teorema de Peano. Lema de Gronwall y aplicaciones.

Si $F = F(t,y)$ no es Lipschitz en la variable $y$ entonces podemos perder unicidad. Sin embargo si $F$ es sólo continua es posible probar que $\exists$ al menos una solución.

Teorema (Peano) Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ dados. Si $F = F(t,y)$ es continua en una vecindad de $(t_0, y_0)$ entonces el problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

tiene al menos una solución $y = y(t)$ de clase $C^1$ definida en una vecindad de $t_0$.

Lema de Gronwall

Resultado muy utilizado (muy aplicable).

Lema (Gronwall)

(I) (versión diferencial) Sea $\rho = \rho(t) \geq 0$, una función no negativa, diferenciable en $t \in [0,T]$, con $T > 0$ fijo, y tal que satisface

$$\rho'(t) \leq \phi(t)\rho(t) + \psi(t) \qquad \cdots (2)$$

$\forall\, t \in [0,T]$, y donde $\phi, \psi \geq 0$, son no negativas e integrables en $[0,T]$
Entonces,

$$\rho(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\left[\rho(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right] \qquad \cdots (3)$$

$\forall\, t \in [0,T]$. En particular si $\rho' \leq \phi\rho$ $\forall\, t$ y $\rho(0) = 0$ entonces $\rho(t) \equiv 0$ $\forall\, t \in [0,T]$.

(II) (versión integral) Sea $\rho = \rho(t) \geq 0$ continua, integrable en $t \in [0,T]$.
Suponiendo que

$$\rho(t) \leq C_1 \int_0^t \rho(s)\,ds + C_2 \qquad \cdots (4)$$

$\forall\, t \in [0,T]$ con $C_j \geq 0$ constantes.
Entonces tenemos,

$$\rho(t) \leq C_2\left[1 + C_1 t e^{C_1 t}\right] \qquad \cdots (5)$$

$\forall\, t \in [0,T]$. particular: si $\rho \leq C_1 \int_0^t \rho(s)\,ds$ entonces $\rho(t) \equiv 0$ $\forall\, t$.

Demostración

(I) Multiplicamos (2) evaluada en $s \in [0,t) \subset [0,T]$, por el factor integrante

$$\exp\left(-\int_0^s \phi(\xi)\, d\xi\right), \quad s \in [0,t),$$

obtenemos

$$\rho'(s)\exp\left(-\int_0^s \phi(\xi)\, d\xi\right) - \phi(s)\rho(s)\exp\left(-\int_0^s \phi\, d\xi\right)$$
$$\leq \psi(s)\exp\left(-\int_0^s \phi(\xi)\, d\xi\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[\rho(s)\exp\left(-\int_0^s \phi(\xi)d\xi\right)\right] \leq$$
$$\leq \psi(s)\exp\left(-\int_0^s \phi(\xi)\, d\xi\right)$$
$$\leq \psi(s)$$

Integrando en $s \in (0,t)$:

$$\rho(t)\exp\left(-\int_0^t \phi(\xi)\, d\xi\right) - \rho(0)$$
$$\leq \int_0^t \psi(s)\, ds$$
$$\Rightarrow (3).$$

Claramente si $\psi \equiv 0$ y $\rho(0)=0$ entonces $\rho(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,T]$.

(II) Definimos $\eta(t) := \int_0^t \rho(s)\, ds \geq 0$
$\forall\, t \in [0,T]$.

Así, $\eta'(t) = \rho(t)$, $\eta(0) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \eta'(t) = \rho(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2,$$

$C_i \geq 0$

Aplicando (I) a $\eta(t) \geq 0$ con
$\phi(s) \equiv C_1$, $\psi(s) \equiv C_2$, obtenemos

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t}\big(\underbrace{\eta(0)}_{=0} + C_2 t\big)$$

$$\leq C_2 t e^{C_1 t}$$

Así,

$$\rho(t) = \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2$$

$$\leq C_1 C_2 t e^{C_1 t} + C_2$$

$$= C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right) \quad \Rightarrow (5)$$

Claramente si $C_2 = 0$ entonces $\rho(t) \equiv 0$
$\forall\, t$

$\square$

Aplicaciones de Gronwall: (i) unicidad.

**Lema 1** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Sea $F: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, continua y tal que $\exists\ L > 0$ con

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$\forall\ (t, y_1), (t, y_2) \in I \times \bar{\Omega}$.

Si $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ y existen dos soluciones $y_1 = y_1(t)$, $y_2(t)$ del problema de Cauchy

$$y' = F(t, y)$$
$$y(t_0) = y_0$$

entonces $y_1(t) = y_2(t)$, $\forall t \in I$.

**Demostración** Para toda función continua y derivable, $y: I \to \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\frac{d}{dt} y(t)^2 = \frac{d}{dt} |y(t)|^2 = 2|y(t)| \frac{d}{dt} |y(t)|$$

$$\parallel$$

$$2y'(t) \cdot y(t) \leq 2|y(t)||y'(t)|$$

Si $|y(t)| \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{dt}|y(t)| \leq |y'(t)|$$

Entonces $\quad \rho(t) := |y_1(t) - y_2(t)| \geq 0$

$$\frac{d\rho}{dt} \leq |y_1'(t) - y_2'(t)|$$

$$= |F(t, y_1(t)) - F(t, y_2(t))|$$

$$\leq L\,|y_1(t) - y_2(t)|$$

$$= L\,\rho(t)$$

Aplicamos Gronwall con $\phi(t) \equiv L$
$\psi(t) \equiv 0$ para concluir que

$$\rho(t) \leq e^{L(t-t_0)} \rho(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad |y_1(t) - y_2(t)| \leq e^{L(t-t_0)} |y_1(t_0) - y_2(t_0)|$$

$\ldots (6)$

Pero $\quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$

$\Rightarrow$ unicidad

$\square$

(ii) continuidad con respecto a los datos iniciales.

Lema 2 Mismas hipótesis del Lema 1. Entonces para dos soluciones $y_1 = y_1(t)$ $y_2 = y_2(t)$ de la ecuación

$$y' = F(t, y)$$

con condiciones iniciales

$$y_1(t_0) = \hat{y}_1, \qquad y_2(t_0) = \hat{y}_2$$

con $t_0 \in I$, $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ dados, se tiene

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq e^{L(t-t_0)} |\hat{y}_1 - \hat{y}_2| \quad \cdots (7)$$

$\forall t$.

Nota: (7) implica continuidad con respecto al dato inicial; si $|\hat{y}_1 - \hat{y}_2| < \varepsilon$ entonces $|y_1(t) - y_2(t)| \leq \varepsilon e^{L\delta}$ si $|t - t_0| < \delta$.

Demostración Se deduce de (6)

$\square$

Lema 3 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $I \subset \mathbb{R}$ abierto, $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua, Lipschitz en $y$ con $L > 0$. Sea $G : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y uniformemente cerca de $F$ :

$(8) \ldots \qquad |F(t,y) - G(t,y)| < \varepsilon$

$\forall (t,y) \in I \times \Omega$

Sean $y = y(t)$, $u = u(t)$ las soluciones de

$$(9) \ldots \quad \begin{array}{c} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \\ (a) \end{array} \qquad \begin{array}{c} u' = G(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \\ (b) \end{array}$$

respectiv., tales que

$$\begin{array}{l} \{(t, y(t))\} \\ \{(t, u(t))\} \end{array} \subset I \times \Omega.$$

Entonces si $|t - t_0| < \delta$ se tiene

$$|u(t) - y(t)| \leq e^{\delta L} \left( |u_0 - y_0| + \varepsilon \delta \right) \quad \ldots (10)$$

Si $u_0 = y_0$ entonces

$$|u(t) - y(t)| \leq \delta \varepsilon e^{\delta L}$$

$\forall \ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Dem.

(a) $\Rightarrow$ $$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} G(s, u(s)) \, ds$$
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s)) \, ds$$

Sea

$$\rho(t) := |u(t) - y(t)|$$
$$\leq |u_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} |F(s, y(s)) - F(s, u(s))| \, ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} |F(s, u(s)) - G(s, u(s))| \, ds$$
$$\leq |u_0 - y_0| + L \int_{t_0}^{t} |y(s) - u(s)| \, ds +$$
$$+ \varepsilon |t - t_0|$$
$$\leq L \int_{t_0}^{t} \rho(s) \, ds + |u_0 - y_0| + \varepsilon \delta$$

Por Gronwall con $c_1 = L$, $c_2 = |u_0 - y_0| + \varepsilon \delta$

Sea $\xi(t) = L \int_{t_0}^{t} \rho(s) \, ds + c_2$.

$\Rightarrow$ $\rho(t) \leq \xi(t)$, $\xi'(t) = L \rho(t) \leq L \xi(t)$

$$\Rightarrow \quad \xi(t) \leq e^{L(t-t_0)} \xi(t_0)$$

$$\leq e^{\delta L} C_2$$

es decir,

$$\rho(t) = |y(t) - u(t)|$$

$$\leq \xi(t)$$

$$\leq e^{\delta L} \left( |u_0 - y_0| + \varepsilon\delta \right)$$

$\square$