Lección 5.1 : Sistemas lineales de primer orden. Matriz fundamental.

Sistemas de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

Teorema de existencia y unicidad ($T\exists!$) (Picard): si $F \in C(J\times\Omega; \mathbb{R}^n)$ y es Lipschitz en y $\Rightarrow$ $\forall\, (t_0, y_0) \in J\times\Omega$ existe una única solución de (1) localmente.

Teo. de $\exists$ sol. global: si $F \in C^1(J\times\Omega; \mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ $\exists$ intervalo máximo de existencia $(\alpha,\beta) \subset J$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, tal que si $\beta < \infty$ entonces para cualquier compacto $K \subset \Omega$ existe $t \in (\alpha,\beta)$ tal que $y(t) \notin \Omega$: o bien, $|y(t)| \to \infty$ a tiempo finito, o bien $y(t)$ llega a $\partial\Omega$ si $t \to \beta^-$.

Sistemas lineales de primer orden

Son de la forma:

$$y' = \underbrace{A(t)\, y + f(t)}_{= F(t,y)} \quad \cdots \quad (2)$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $A \in C(J; \mathbb{R}^{n \times n})$ y $f \in C(J; \mathbb{R}^n)$ con $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Si $f = f(t) \equiv 0$ $\forall t \in J$ el sistema se llama homogéneo

$$y' = A(t)\, y \qquad \cdots (3)$$

Notación:

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – conjunto de operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (matrices de $n \times n$).

$A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, familia de operadores ($t \in \mathbb{R}$).

La norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es

$$\|A\| = \sup_{|y|=1} |Ay| \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$|\cdot|$ – norma usual en $\mathbb{R}^n$.

<u>Teorema</u> Sea $J = (\alpha, \beta)$ intervalo abierto, $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$. Si $A \in C(J; \mathbb{R}^{n \times n})$ y $f \in C(J; \mathbb{R}^n)$ entonces la solución de (2) con datos $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in J$ está definida $\forall t \in J$.

Nota: en el caso lineal el intervalo máximo de $\exists$ es el dominio de continuidad de A y de f.

<u>Demostración.</u> $F(t,y) = A(t)y + f(t)$ continua en

$$D = J \times \mathbb{R}^n = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$$

Mas aún, es Lipschitz continua en y en cualquier rectángulo

$$R = \{ |t - t_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b \}$$

con $b>0$, $0 < a \leq 2|\beta - \alpha|$, ya que

$$|F(y,t) - F(x,t)| \leq \underbrace{\max_{|t-t_0| \leq a} \|A(t)\|}_{=: L > 0} |x-y|$$

Iteraciones de Picard:

$$y_0(t) \equiv y_0$$

$$y_j(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s) y_{j-1}(s) + f(s)] ds$$

$\forall j \geq 1$.

convergen uniformemente $\forall t \in [t_1, t_2]$ para cualesquiera $-\infty \leq \alpha < t_1 < t_2 < \beta \leq \infty$.

En efecto, por continuidad en $[t_1, t_2]$,

$$\|A(t)\| \leq L \qquad \forall\, t \in [t_1, t_2]$$
$$|y_1(t) - y_0| \leq C$$

$$\Rightarrow \quad |y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, |y_1(s) - y_0| \, ds$$
$$\leq CL(t_2 - t_1)$$

Analogamente,

$$|y_j(t) - y_{j+1}(t)| \leq C \frac{L^j}{j!} (t_2 - t_1)^j \qquad \forall\, j \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad |y_{j+1}(t) - y_0| \leq C \exp(L|t_2 - t_1|)$$

$$\Rightarrow \quad \max_{t \in [t_1, t_2]} |y_{j+1}(t) - y_0| \leq C \exp(L|t_2 - t_1|)$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, cota uniforme.

Por el T∃! la solución existe y es única $\forall\, t \in [t_1, t_2]$.

Si $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, basta con tomar $t_1 = -\tilde{R}$, $t_2 = \tilde{R}$, $\forall\, \hat{R} > 0$ arbitrario.

Sólo resta verificar que no hay "blow up" (caso $-\infty < \alpha$, ó $\beta < \infty$)

Supongamos que $t_0 < b < \beta$

y que $|Y(t)| \to \infty$ si $t \to b^-$.

La solución satisface

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)Y(s) + f(s)]\, ds$$

$$\|A(t)\| \leq C_1, \quad |f(s)| \leq C_2 \quad \forall\, t \in [t_0, b]$$

$$\Rightarrow \quad |Y(t)| \leq \underbrace{|Y_0| + C_2(b-t_0)}_{=: C_3} + C_1 \int_{t_0}^{t} |Y(s)|\, ds$$

$$\leq C_3 + C_1 \int_{t_0}^{t} |Y(s)|\, ds$$

Por Gronwall:

$$|Y(t)| \leq C_3 \left(1 + C_1 |t-t_0| \exp\left(C_1 |t-t_0|\right)\right)$$

$\therefore$ $|Y(t)|$ acotado si $t \to b^-$, $b < \beta \leq \infty$

$\lightning$

Concluimos que la solución $\exists$ $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$

$\square$

Sistemas lineales homogéneos

Problema de Cauchy homogéneo

$$\left.\begin{aligned} y' &= A(t)y \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $\quad t_0 \in J \subseteq \mathbb{R}$.

Por el teorema anterior y el T∃!

$\Rightarrow$ (4) tiene una única solución global en J.

Sean $\{y_j(t)\}_{j=1}^{p}$, $p\in\mathbb{N}$ una colección de soluciones de la ecuación (3), $t\in J$.

Principio de superposición: para cualesquiera $c_j \in \mathbb{R}$, $1\leq j\leq p$,

$$y(t) := \sum_{j=1}^{p} c_j y_j(t), \qquad t\in J$$

también es solución:

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j y_j'(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j A(t) y_j(t)$$

$$= A(t)y(t).$$

Lema 1 Sea $y(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j y_j(t)$ solución.
Si $y(t_*) = 0$ para cierto $t_* \in J$ entonces $y(t) \equiv 0$ $\forall t \in J$.

Demostración: Por unicidad de la solución al problema de Cauchy (4): si $y(t)$ coincide con la solución trivial en $t_* \in J$ entonces coincide con la solución trivial en su máximo intervalo de $\exists$, que es J.

$\square$

Nota: esto ocurre porque $f(t) \equiv 0$.

Definición Una colección de soluciones de (3), $\{y_j(t)\}_{j=1}^{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $t \in J$, es linealmente independiente si no existen constantes $(c_1, \dots, c_p) \neq (0, \dots, 0)$ tales que

$$\sum_{j=1}^{p} c_j y_j(t) = 0 \quad \forall t \in J \qquad \dots (5)$$

Lema 2 $\{y_j(t)\}_{j=1}^{p}$ es linealmente independiente ssi los vectores en $\mathbb{R}^n$, $y_1(t_*), y_2(t_*), \dots, y_p(t_*)$ son linealmente independientes $\forall t_* \in J$ arbitrario.

Corolario Si $\{y_j(t)\}_{j=1}^{p}$ es linealmente independiente entonces $p \leq n$.

Demostración "$\Rightarrow$" $y(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j y_j(t)$

es solución de (3), $(c_1, \ldots, c_p) \neq (0, \ldots, 0)$.

suponiendo $y(t_*) = 0$, con $t_* \in J$
por el Lema 1 tendríamos $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in J$
(contradicción).

"$\Leftarrow$" $\forall t_* \in J$, $y_1(t_*), \ldots, y_p(t_*)$ son linealmente indep. en $\mathbb{R}^n$
$(p \leq n)$

Si $y(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j y_j(t)$ (solución)

se anula en un cierto $\tilde{t} \in J$, por el lema 1, $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in J$.

En particular $y(t_*) = 0$ ¡contradicción!

$\square$

Definición Una colección de exactamente n soluciones linealmente independientes de (3) $\{y_j(t)\}_{j=1}^{n}$, se llama <u>sistema fundamental</u>.

Lema 3 Si $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$ entonces siempre existe un sistema fundamental en $t \in J$.

Demostración Sea $t_0 \in J$, arbitrario.
Por el T$\exists$! existe una única solución $y_j = y_j(t)$, $t \in J$, al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_j' = A(t)\, y_j & \forall t \in J \\ y_j(t_0) = \hat{e}_j & \forall\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

donde $\{\hat{e}_j\}_{j=1}^{n}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Por el lema 2, $\{y_j(t)\}_{j=1}^{n}$ son un sistema fundamental

$\square$

Corolario Toda solución de (3) es una combinación lineal de elementos de un sistema fundamental.

Definición Una matriz fundamental del sistema (3) es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

matriz cuyas columnas son un sistema fundamental. $\Phi \in C^1(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, claramente.

si además $\Phi(t_0) = I$ (identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$) se le llama matriz fundamental principal en $t = t_0$.

<u>Corolario</u> Siempre existen

: matriz fundamental

y : " " principal

$\forall t = t_0$. Mas aún, toda matriz fundamental es solución de

$$\Phi' = A(t)\,\Phi$$

La única solución de (4) se puede escribir como

$$y(t) = \Phi(t)\,y_0$$

si $\Phi(t_0) = I$.