Lección 5.3 : Coeficientes constantes.

Sistema lineal, no homogéneo:

$$y' = A(t)\, y + f(t) \qquad \cdots (1)$$

con $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in C(J; \mathbb{R}^n)$, $J \subseteq \mathbb{R}$

Problema de Cauchy: resolver (1) con condición inicial

$$y(t_0) = y_0 \qquad \cdots (2)$$

con $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, dados. Sea

$$\Phi \in C^1(J; \mathbb{R}^{n\times n})$$

$$\Phi = \Phi(t)$$

matriz fundamental principal en $t = t_0$:

$$\Phi' = A(t)\,\Phi, \qquad \Phi(t_0) = I \qquad \cdots (3).$$

Entonces la única solución de (1)-(2) es:

$$y(t) = \underbrace{\Phi(t_0) y_0}_{} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\,\Phi(s)^{-1} f(s)\, ds \qquad \cdots (4)$$

(fórmula de variación de parámetros).

Ejemplo: Resolver

$$(5)\cdots \begin{cases} \boxed{x' = y \\ y' = -x} + t & , \quad x(0) = 0 \\ & , \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

Sistema en $\mathbb{R}^2$, de la forma (1) con

$$A(t) \equiv A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Es fácil probar que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental principal.

En efecto:

- $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\rightarrow$
- $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$= A\,\Phi(t)$$

$$\det \Phi(t) = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1 \quad \forall t$$

$$\neq 0$$

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La solución de (S) es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \underbrace{\Phi(s)^{-1} f(s)}\, ds$$

$$\Phi(s)^{-1} f(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds = \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ \cos t + t \sin t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

La solución de (S) es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t + \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}$$

Observación : la fórmula (4) requiere calcular $\Phi(t)^{-1}$, costoso si $n \geq 3$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz constante entonces la fórmula (4) se simplifica :

Lema Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante. Entonces (4) se reduce a :

$$(6) \ldots \quad Y(t) = \Phi(t) Y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s+t_0) f(s) ds$$

Dem. Sea $s \in J$, fijo pero arbitrario. Entonces la matriz

$$\Omega_1(t) := \Phi(t)\Phi(s)^{-1}, \qquad t \in J$$

es solución de

$$(7) \ldots \begin{cases} \Omega_1' = A\Omega_1 \\ \Omega_1(s) = I \end{cases}$$

Pero, $\Omega_2(t) := \Phi(t-s+t_0)$ también es solución de (7) ya que A es constante :

$$\Omega_2' = \Phi'(t-s+t_0) = A\Phi(t-s+t_0)$$
$$= A\Omega_2$$

$$\Omega_2(s) = \Phi(t_0) = I$$

Por el TEU! $\Omega_2(t) = \Omega_1(t)$, $\forall t \in J$.

$\Rightarrow$ (6)

$\square$

Nota: si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es constante

$$\Phi(t) = e^{tA}$$

Coeficientes constantes

Sistemas de la forma:

$$y' = Ay \qquad \dots \quad (1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Norma:

$$\|A\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ |v| = 1}} |Av|$$

$|\cdot|$ - norma euclideana en $\mathbb{R}^n$

Nótese que:

(i) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

(ii) $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1 Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

(a) La función $e^{\lambda t} v$, con $v \in \mathbb{R}^n$ es solución real de (1) si y sólo si $Av = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Si $v = u + iw$ es vector propio de A con $u, w \in \mathbb{R}^n$, asociado a un valor propio $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces las funciones reales

$$e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) u - \sin(\beta t) w\right] =: y_1(t)$$

y $$e^{\alpha t}\left[\sin(\beta t) u + \cos(\beta t) w\right] =: y_2(t)$$

son dos soluciones reales de (1) y linealmente independientes.

Demostración:

(a) $$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} v\right) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v$$

$$\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{e^{\lambda t} v}, \ v \in \mathbb{R}^n \text{ solución} \iff \underset{v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}}{Av = \lambda v}$$

(b) Suponemos $v = u + iw$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

Entonces,

$$A(u+iw) = (\alpha+i\beta)(u+iw)$$
$$= (\alpha u - \beta w) + i(\beta u + \alpha w)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} Au &= \alpha u - \beta w \\ Aw &= \beta u + \alpha w \end{aligned}$$

Sean $y_1(t), y_2(t) \in \mathbb{R}^n$. Derivando:

$$y_1'(t) = \alpha e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\,u - \sin(\beta t)\,w\right] +$$
$$+ \beta e^{\alpha t}\left[-\sin(\beta t)\,u - \cos(\beta t)\,w\right]$$
$$= e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,[\underbrace{\alpha u - \beta w}_{Au}] +$$
$$- e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,[\underbrace{\alpha w + \beta u}_{Aw}]$$

$$= Ay_1 \quad \checkmark$$

Análogamente, $y_2' = Ay_2$.

Escogiendo $t_0 = 0$, $\quad \begin{aligned} y_1(0) &= u - w \\ y_2(0) &= u + w \end{aligned} \in \mathbb{R}^n$

Pero como $A(u+iw) = (\alpha+i\beta)(u+iw)$ con $\beta \neq 0$ entonces $\underset{y_1(0)}{\underset{\parallel}{u-w}}$ y $\underbrace{u+w}_{y_2(0)}$ son linealmente indep.

$$\Rightarrow \quad y_1(t), y_2(t) \text{ son linealm. independ.} \quad \square$$

Corolario Si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y los valores propios son distintos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

("estrictamente hiperbólica"), entonces $\exists$ una base completa de vectores propios

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } \mathbb{R}^n$$

$$A v_j = \lambda_j v_j \qquad 1 \leq j \leq n$$

y la matriz fundamental principal en $t=0$ de (1) es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 & \cdots & e^{\lambda_n t} v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Lema 2 Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} =: e^A$$

converge absolutamente.

Demostración Sea $\underset{\in \mathbb{R}^{n \times n}}{S_N} := \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}, \quad N \in \mathbb{N}.$

Entonces,

$$\|S_N\| \leq 1 + \|A\| + \frac{1}{2!}\|A\|^2 + \dots + \frac{1}{N!}\|A\|^N$$

$$\forall N \in \mathbb{N}$$

Es decir, $\|S_N\| \leq e^{\|A\|} \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$
lo cual implica convergencia absoluta de la serie,

$$\lim_{N\to\infty} S_N =: e^A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

$\square$

Lema 3 (propiedades básicas)

Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

(a) $e^A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

(b) Si B es no singular entonces

$$B e^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

(c) Si A y B conmutan ($AB = BA$) entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

(d) e^A es invertible con $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

(e) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A \quad \forall t \in \mathbb{R}$
(es decir, e^{tA} es matriz fundamental principal en $t=0$, y A y e^{tA} conmutan).

(f) $\|e^{A}\| \leq e^{\|A\|}$.