Lección 5.4 : Forma canónica de Jordan y solución con coeficientes constantes.

Lema (propiedades básicas)

Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

(a) $e^A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

(b) Si B es no singular entonces

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}} \qquad (BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}$$

(c) Si $AB = BA$ entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

(d) e^A es no singular con $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(e) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(f) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

Demostración (a), (b), (c) se deducen directamente de la definición y por convergencia absoluta de la serie.

(d) se deduce de (c)

(f) se probó la clase pasada.

Prueba de (e):

A conmuta consigo misma $\Rightarrow$

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(e^{(s+t)A} - e^{tA}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(e^{sA} - I\right)\cdot e^{tA}$$

$$= \left[\lim_{s\to 0}\left(A + R(s)\right)\right]\cdot e^{tA}$$

con

$$\|R(s)\| = \left\| \frac{1}{s}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}(sA)^k \right\|$$

$$\leq |s| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} |s|^{k-2} \|A\|^k$$

$$\leq |s| e^{\|A\|}$$

$|s| \leq 1$

Así, $R(s) \to 0$ si $s \to 0$ y obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

A y e^{tA} conmutan : se sigue de la definición.

$\square$

Observación:

$\Phi(t) = e^{tA}$ es la matriz fundamental principal en $t=0$.

Fórmula explícita (no siempre es fácil de manipular).

Para calcularla aplicaremos la forma canónica de Jordan. Para demostrar resultados teóricos usualmente es más útil aplicar las propiedades de <u>semigrupo</u>:

(i) $\Phi(0) = I$.

(ii) $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$ $\forall\ t,s \in \mathbb{R}$

(iii) $t \mapsto \Phi(t)v$ es continua de $[0,\infty)$ a $\mathbb{R}^n$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ fijo.

<u>Teorema</u> (forma canónica de Jordan - FCJ-)

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con valores propios:

- $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $n \geq k \geq 0$ valores propios reales

- $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ — $j = k+1, \ldots, m$
  $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$

  $n-k$ valores propios complejos

  $2(m-k-1) + k = n$

Entonces existe una base de $\mathbb{R}^n$:

$$\{\underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{\text{k vectores propios en } \mathbb{R}^n}, \underbrace{u_{k+1}, w_{k+1}, \ldots, u_m, w_m}_{\substack{2(m-k-1) = n-k \\ \text{vectores propios en } \mathbb{R}^n}}\} \subset \mathbb{R}^n$$

tal que los vectores $v_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq k$, $u_j + i w_j \in \mathbb{C}^n$ son vectores propios generalizados asociados a los valores propios reales y complejos, respectivamente.

Mas aún, la matriz

$$S := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k & u_{k+1} & w_{k+1} & \cdots & u_m & w_m \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$k + 2(m-k-1) = n$

es invertible y tal que

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

$$= \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} =: J$$

matriz de r bloques de Jordan, $1 \leq r \leq n$, de la forma:

- $$J_h = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

si $\lambda_j \in \mathbb{R}$

o bien,
- $$J_h = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & I_2 \\ 0 & \cdots & & \cdots & D \end{pmatrix}$$

con $D = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ " "

si $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

Referencia: Perko, sección 1.8.

Sistema homogéneo:

$$y' = Ay \qquad \ldots (1)$$

Observaciones:

- $\Phi(t) = e^{tA} = e^{t(SJS^{-1})} = Se^{tJ}S^{-1}$

  Basta con describir e^{tJ_k}.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ valor propio con

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

nilpotente $N^p = 0$ para $p \leq n-1$.

Por lo tanto:

$$\exp(tJ) = \exp(t\lambda I + tN)$$

$$= \underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{crecimiento}} \underbrace{\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(tN)^m}{m!}}_{\text{polinomio en } t \text{ de orden } \leq p-1 \leq n-2}$$

Si $\lambda > 0$ entonces crecimiento exponencial

Si $\lambda < 0$ " decrecimiento " .

Estructura de la solución : $e^{\lambda t} \underbrace{Q(t)}_{\text{polinomio}}$

- Si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, con $\beta \neq 0$,

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \exp(tD) = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\substack{\text{creciente} \\ e^{t \operatorname{Re} \lambda}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}}_{\substack{\text{oscilatorio} \\ \text{(acotado)}}}$$

Los bloques $J_h = \begin{pmatrix} D & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & I_2 \\ & & & D \end{pmatrix}$

se expresan nuevamente como multiplicaciones de e^{tD} por polinomios en t.

Proposición Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces la matriz fundamental

$$\Phi(t) = e^{tA}$$

es una matriz de $n \times n$ cuyas componentes son sumas finitas de términos de la forma,

$$p(t)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad q(t)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

donde $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$, y $p(t)$, $q(t)$ son polinomios de grado $n-1$.

consecuencias: suponemos A es no singular:

- Si $\exists$ un valor propio con $Re\,\lambda = \alpha > 0$ entonces cualquier solución $y(t)$ de (1) crece exponencialmente si $t \to \infty$.

- Si todos los valores propios de A satisfacen $Re\,\lambda = \alpha < 0$ entonces $|y(t)| \to 0$ si $t \to \infty$.

- $y \equiv 0$ es punto de equilibrio.

  $\sigma(A)$ determina la "estabilidad" del punto de equilibrio.