Ecuaciones Diferenciales I

Semestre 2022-2

Tarea 4

Fecha de entrega: 25 de marzo, 2022.

1. (4 pts.) Encuentra la solución a los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$, $y(0) = 1$.

(b) $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2$, $y(\pi) = 0$, $t > 0$.

(c) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = 1/2$.

(d) $y' - (\tan t)y = e^{\sin t}$, $y(\pi/4) = 1$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

2. (3 pts.) Considera la ecuación homogénea $y' + a(t)y = 0$, donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica de periodo $L > 0$, es decir, $a(t + L) = a(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $y' = dy/dt$.

(a) Sea v una solución no trivial de la ecuación, y sea $\psi(t) = v(t + L)$. Prueba que ψ es también solución.

(b) Demuestra que existe una constante c tal que $v(t + L) = cv(t)$ para todo t. Calcula c en términos de a y de L.

(c) ¿Qué condición debe satisfacer a para que exista una solución no trivial de periodo L?

3. (1 pt.) Suponiendo que $y = y(t)$ es una función con derivada continua en $t \in [0, 1]$, que satisface la desigualdad $y' - 2y \leq 1$ para todo $t \in [0, 1]$, con $y(0) = 1$, demuestra que

$$y(t) \leq \tfrac{3}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2},$$

para todo $0 \leq t \leq 1$.

4. (2 pts.) Infecciones parasitarias. Se llevó a cabo un estudio sobre el efecto de una infección parasitaria en el sistema inmunitario de un animal con el parásito nematodo intestinal *Heligmosoides polygyrus* y un número fijo de ratones de laboratorio. Los ratones fueron alimentados con larvas de parásitos a una tasa constante de $\lambda > 0$ larvas por ratón, por día. La larva migra a la pared del intestino delgado. Allí mueren a una tasa per cápita de $\mu_0 > 0$ y se convierten en parásitos maduros, que migran a la luz intestinal, a una tasa per cápita de $\mu > 0$. Los parásitos maduros mueren a la tasa per cápita $\delta > 0$. Si $L = L(t)$ es el número promedio de larvas por ratón y $M = M(t)$ es el número promedio de parásitos maduros por ratón, entonces el modelo se vuelve

$$L' = \lambda - (\mu_0 + \mu)L,$$
$$M' = \mu L - \delta M.$$

Inicialmente, $L(0) = M(0) = 0$. Primero, explica los términos del modelo. Luego resuelve la ecuación de la larva y sustituye la solución en la ecuación del parásito maduro para encontrar $M(t)$. Haz las gráficas de L y M como funciones del tiempo $t > 0$. Para obtener más detalles sobre el experimento, las constantes y la respuesta inmunitaria, consulta el libro de J. D. Murray (2002), *Mathematical Biology I. An Introduction*, 3rd ed., Springer, New York, pp. 351–361.

Total: 10 pts.