Ecuaciones Diferenciales I
Semestre 2022-2

Tarea 6
Fecha de entrega: 29 de abril, 2022.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales de segundo orden:

(a) (1 pt.) $y'' + 5y' + 6y = 0$. (Encuentra la solución general.)

(b) (1 pt.) $y'' + 2y' + 2y = 0$, con condiciones iniciales $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = -2$.

(c) (1 pt.) $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$, con $\alpha > 0$ constante. Encuentra la solución general. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$?

2. Sea la ecuación diferencial homogénea,

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0,$$

donde $y = y(t)$, $y \in C^2(I; \mathbb{R})$, $I = (0, \infty)$.

(a) (1 pt.) Prueba que $y_1(t) = \sqrt{t}$ y $y_2(t) = 1/t$ son soluciones de la ecuación.

(b) (1 pt.) Calcula el Wronskiano, $W(t) = W[y_1, y_2](t)$. ¿Qué sucede cuando $t \to 0$? Prueba que y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $I = (0, \infty)$.

(c) (1 pt.) Resuelve el problema con valores iniciales $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

3. (2 pts.) La ecuación diferencial

$$y'' + \delta(ty' + y) = 0,$$

con $\delta > 0$, constante, ocurre en la descripción de flujo turbulento de una corriente uniforme que pasa sobre un cilindro circular. Verifica que $y_1(t) = e^{-\delta t^2/2}$ es una solución y mediante el método de reducción de orden, encuentra la solución general en forma de una integral.

4. (1 pt.) Sea $y_1(t) \neq 0$, $y_1 \in C^2(I; \mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto, una solución a la ecuación lineal homogénea de segundo orden, $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, con $p, q \in C(I; \mathbb{R})$. Prueba que una segunda solución $y_2 \in C^2(I; \mathbb{R})$ satisface

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(t)}{(y_1)^2},$$

donde $W(t) = W[y_1, y_2]$ es el Wronskiano de y_1 y y_2.

5. (1 pt.) Sean las funciones $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Demuestra que y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $t \in I = (-1, 1)$ (De hecho, son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.) Sin embargo, calcula el Wronskiano para estas funciones y verifica que $W[y_1, y_2](0) = 0$, en $t = 0$. ¿Contradice esto la afirmación: "*Dos soluciones de la ecuación homogénea* $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ *son linealmente independientes en el intervalo abierto* I *si y sólo si* $W[y_1, y_2] \neq 0$"? Explica tu respuesta.

Total: 10 pts.