Ecuaciones Diferenciales I

Semestre 2022-2

Tarea 8

Fecha de entrega: 23 de mayo, 2022.

1. (a) (1 pt.) Sea f periódica de periodo p, es decir, $f(t+p) = f(p)$ para todo $t \geq 0$. Prueba que

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

(b) (1 pt.) Usa la fórmula en (a) para encontrar la transformada de Laplace de $|\sin t|$.

(c) (1 pt.) Usa la fórmula en (a) para encontrar la transformada de Laplace de la función de salto que es periódica de periodo $p = 1$ y que vale 1 en $[0, \frac{1}{2})$ y que vale 2 en $[\frac{1}{2}, 1)$.

2. Usando la transformada de Laplace, encuentra la solución a los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) (1 pt.) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

(b) (1 pt.) $y'' + (2/t)y' + y = 0, \quad \lim_{t\to 0^+} y(t) = 1,\ y(\pi) = 0.$

(c) (1 pt.) $y'' + 2y' + 2y = h(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 1, & \pi < t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

(d) (1 pt.) $ty'' + (t-1)y' - y = 0, \quad y(0) = 5,\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$

3. Considera el problema de valores iniciales:

$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t-1),$$

con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Aquí el forzamiento, $\delta(t-1)$, es la delta de Dirac centrada en $t = 1$, y representa un pulso localizado. La constante $\gamma > 0$ es el coeficiente de amortiguamiento.

(a) (1 pt.) Encuentra la solución si $\gamma = \frac{1}{2}$. Haz un dibujo de la solución.

(b) (1 pt.) Encuentra el tiempo $t = t_1$ para el cual la solución alcanza un valor máximo que denotamos por $y(t_1) = y_1$.

(c) (1 pt.) Repite los incisos (a) y (b) para $\gamma = \frac{1}{4}$. Extrapola y determina cómo dependen los valores t_1 y y_1 en función de γ cerca de cero. ¿Cuál es el límite de t_1 y de y_1 cuando $\gamma \to 0^+$?

Total: 10 pts.