SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

(9 CRÉDITOS)

RAMÓN G. PLAZA

Temario

I. Generalidades
   1. Leyes de conservación y leyes de balance. Modelos y ejemplos.
   2. Soluciones débiles, condiciones de salto y no unicidad.
   3. Hiperbolicidad.
   4. Entropía y flujo de entropía.
   5. Condiciones de admisibilidad. Aproximación viscosa.

II. Ecuación escalar
   1. Ecuación escalar en una dimensión.
   2. Soluciones débiles.
   3. Condiciones de entropía.
   4. Solución entrópica para flujo convexo: la fórmula de Lax.
   5. El problema de Riemann
   6. Comportamiento a tiempos largos. Ondas N.
   6. Teoría de Kružkov-Oleinik.
   7. La ecuación de Burgers, modelo de tráfico y otros ejemplos.

III. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión espacial.
   1. Hiperbolicidad. Ondas viajeras.
   2. Invariantes de Riemann.
   3. Ondas de choque. Condiciones de entropía de Lax, Oleinik y Liu-Oleinik.
   4. Ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto.
   5. Solución al problema de Riemann.
   6. El teorema de representación de Lax.
   7. Las ecuaciones de Euler.
   8. Ondas de choque no clásicas: transiciones de fase.

IV. El esquema de Glimm
   1. Funciones de variación acotada.
   2. La estimación de interacción.
   3. Aproximación en diferencias: descripción del esquema de Glimm.
   4. Convergencia.

V. El método de aproximación viscosa: Teoría de Bianchini-Bressan.
   1. Descomposición en ondas viajeras.
   2. Interacción de ondas de diferente familia.
   3. Interacción de ondas de la misma familia.
   4. Estimaciones de energía.
   5. Estimaciones de estabilidad.

6. Soluciones de variación acotada al problema de Cauchy en una dimensión.

VI. Existencia y estabilidad de ondas de choque viscosas.
1. Perfiles viscosos escalares: existencia.
2. Estabilidad de ondas de choque escalares.
3. Perfiles para sistemas: construcción de Kopell y Howard.
4. Criterio de admisibilidad de Majda-Pego.
5. Estabilidad de perfiles en una dimensión: el método de diagonalización de Goodman.
6. El teorema de Liu: ondas de difusión.

VII. Introducción a métodos numéricos para leyes de conservación.
1. Generalidades: Estabilidad, convergencia, la condición CFL y el teorema de equivalencia de Lax.
2. Métodos de Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff y MacCormack.
3. Teorema de Lax-Wendroff.
4. Método de Godunov.
5. Aproximaciones de Riemann: El método de Roe.

Bibliografía

[1] S. Benzoni-Gavage and D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.

[2] S. Bianchini and A. Bressan, *A center manifold technique for tracing viscous waves*, Commun. Pure Appl. Anal. **1** (2002), no. 2, pp. 161–190.

[3] ———, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 1, pp. 223–342.

[4] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.

[5] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, vol. 35 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2005.

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[8] I. M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasi-linear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **29** (1963), no. 2, pp. 295–381.

[9] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.

[10] J. Goodman, *Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **95** (1986), no. 4, pp. 325–344.

[11] A. M. Ilin and O. A. Oleinik, *Behaviour of the solutions of the Cauchy problem for certain quasilinear equations for unbounded increase of time*, Amer. Math. Soc. Transl. **42** (1964), pp. 19–23.

[12] N. Kopell and L. N. Howard, *Bifurcations and trajectories joining critical points*, Adv. in Math. **18** (1975), no. 3, pp. 306–358.

[13] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), pp. 537–566.

[14] ———, *Lecture Notes on Hyperbolic Partial Differential Equations*, Stanford University Press, 1963.

[15] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.

[16] P. G. LeFloch, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and non-classical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
[17] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.
[18] T.-P. Liu, *The entropy condition and the admissibility of shocks*, J. Math. Anal. Appl. **53** (1976), pp. 78–88.
[19] ———, *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*, Mem. Amer. Math. Soc. **56** (1985), no. 328, pp. v + 108.
[20] ———, *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, vol. 72 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2000.
[21] A. Majda, *The existence of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **43** (1983), no. 281, pp. v + 93.
[22] ———, *The stability of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **41** (1983), no. 275, pp. iv + 95.
[23] ———, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.
[24] A. Majda and R. L. Pego, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, J. Differential Equations **56** (1985), pp. 229–262.
[25] D. H. Sattinger, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Advances in Math. **22** (1976), no. 3, pp. 312–355.
[26] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
[27] ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
[28] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.

Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Apdo. Postal 20-726, C.P. 01000 México D.F. (México)

E-mail address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`