

**SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN**  
**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**(9 CRÉDITOS)**

RAMÓN G. PLAZA

TEMARIO

- I. Generalidades
  1. Leyes de conservación y leyes de balance. Modelos y ejemplos.
  2. Soluciones débiles, condiciones de salto y no unicidad.
  3. Hiperbolicidad.
  4. Entropía y flujo de entropía.
  5. Condiciones de admisibilidad. Aproximación viscosa.
- II. Ecuación escalar en una dimensión
  1. Existencia local de soluciones clásicas
  2. Soluciones débiles.
  3. Condiciones de entropía.
  4. Solución entrópica para flujo convexo: la fórmula de Lax.
  5. El problema de Riemann
  6. Comportamiento a tiempos largos. Ondas  $N$ .
  6. Teoría de Kružkov-Oleinik.
  7. La ecuación de Burgers, modelo de tráfico y otros ejemplos.
- III. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión espacial.
  1. Hiperbolicidad. Ondas viajeras.
  2. Invariantes de Riemann.
  3. Ondas de choque. Condiciones de entropía de Lax, Oleinik y Liu-Oleinik.
  4. Ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto.
  5. Solución al problema de Riemann.
  6. El teorema de representación de Lax.
  7. Las ecuaciones de Euler.
  8. Ondas de choque no clásicas: transiciones de fase.
- IV. El esquema de Glimm
  1. Funciones de variación acotada.
  2. La estimación de interacción.
  3. Aproximación en diferencias: descripción del esquema de Glimm.
  4. Convergencia.
- V. Existencia y estabilidad de ondas de choque viscosas.
  1. Perfiles viscosos escalares: existencia.
  2. Estabilidad de ondas de choque escalares.
  3. Perfiles para sistemas: construcción de Kopell y Howard.
  4. Criterio de admisibilidad de Majda-Pego.
  5. Estabilidad de perfiles en una dimensión: el método de diagonalización de Goodman.

6. El teorema de Liu: ondas de difusión.
- VI. Introducción a métodos numéricos para leyes de conservación.
  1. Generalidades: Estabilidad, convergencia, la condición CFL y el teorema de equivalencia de Lax.
  2. Métodos de Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff y MacCormack.
  3. Teorema de Lax-Wendroff.
  4. Metodo de Godunov.
  5. Aproximaciones de Riemann: El método de Roe.

## REFERENCIAS

- [1] S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [2] S. BIANCHINI AND A. BRESSAN, *A center manifold technique for tracing viscous waves*, *Commun. Pure Appl. Anal.* **1** (2002), no. 2, pp. 161–190.
- [3] ———, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*, *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 1, pp. 223–342.
- [4] A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.
- [5] J. CARR, *Applications of Centre Manifold Theory*, vol. 35 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [6] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2005.
- [7] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [8] I. M. GELFAND, *Some problems in the theory of quasi-linear equations*, *Amer. Math. Soc. Transl.* **29** (1963), no. 2, pp. 295–381.
- [9] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [10] J. GOODMAN, *Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986), no. 4, pp. 325–344.
- [11] A. M. ILIN AND O. A. OLEINIK, *Behaviour of the solutions of the Cauchy problem for certain quasilinear equations for unbounded increase of time*, *Amer. Math. Soc. Transl.* **42** (1964), pp. 19–23.
- [12] N. KOPELL AND L. N. HOWARD, *Bifurcations and trajectories joining critical points*, *Adv. in Math.* **18** (1975), no. 3, pp. 306–358.
- [13] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), pp. 537–566.
- [14] ———, *Lecture Notes on Hyperbolic Partial Differential Equations*, Stanford University Press, 1963.
- [15] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [16] P. G. LEFLOCH, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and non-classical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [17] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.
- [18] T.-P. LIU, *The entropy condition and the admissibility of shocks*, *J. Math. Anal. Appl.* **53** (1976), pp. 78–88.
- [19] ———, *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **56** (1985), no. 328, pp. v + 108.
- [20] ———, *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, vol. 72 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [21] A. MAJDA, *The existence of multi-dimensional shock fronts*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **43** (1983), no. 281, pp. v + 93.

- [22] ———, *The stability of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **41** (1983), no. 275, pp. iv + 95.
- [23] ———, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [24] A. MAJDA AND R. L. PEGO, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, J. Differential Equations **56** (1985), pp. 229–262.
- [25] D. H. SATTINGER, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Advances in Math. **22** (1976), no. 3, pp. 312–355.
- [26] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [27] ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [28] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y MECÁNICA, IIMAS-UNAM, APDO. POSTAL 20-726, C.P. 01000 MÁXICO D.F. (MÉXICO)

*E-mail address:* `plaza@mym.iimas.unam.mx`