Facultad de Ciencias, UNAM — Dr. Ramón G. Plaza
Semestre 2009-II

Ecuaciones Diferenciales I
Tarea optativa (Transformada de Laplace)

1. Sea $a > 0$

   (i) Prueba que
   $$\mathcal{L}\left(\frac{\sin at}{2a^3} - \frac{t\cos at}{2a^2}\right)(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}.$$

   (ii) Encuentra una función $t \mapsto f(t)$ tal que
   $$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$

2. ¿Qué función tiene como transformada de Laplace el mapeo $s \mapsto (s-4)^{-3}$?

3. Sea $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$. Asume que $f(t)/t$ tiene un límite cuando $t \to 0^+$. Prueba que
   $$\mathcal{L}\left(f(t)/t\right)(s) = \int_s^{+\infty} F(\zeta)\, d\zeta.$$

   Observación: La hipótesis de que $f(t)/t$ tiene un límite cuando $t \to 0^+$ garantiza que la integral del lado derecho existe.

4. (i) Sea f periódica de periodo p, es decir, $f(t+p) = f(p)$ para todo $t \geq 0$. Prueba que
   $$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

   (ii) Usa la fórmula en (i) para encontrar la transformada de Laplace de $|\sin t|$.

   (iii) Usa la fórmula en (i) para encontrar la transformada de Laplace de la función de salto que es periódica de periodo $p = 1$ y que vale 1 en $[0, \frac{1}{2})$ y que vale 2 en $[\frac{1}{2}, 1)$.

5. Usando métodos de la transformada de Laplace, encuentra la solución al los siguientes problemas con valores iniciales:

   (a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

   (b) $ty'' + 2y' + ty = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(\pi) = 0.$

   (c) $ty'' + (t-1)y' - y = 0, \qquad y(0) = 5,\ y(+\infty) = 0.$

(d) $y'' - ty' + y = 1, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

6. Sea $\omega, k \in \mathbb{R}$ con $k \neq \omega$. Usa la transformada de Laplace para demostrar que la solución al problema de valores iniciales $y'' + k^2 y = A\cos\omega t$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$, está dada por

$$y(t) = \frac{A(\cos\omega t - \cos kt)}{k^2 - \omega^2} + \alpha\cos kt + \frac{\beta}{k}\sin kt,$$

donde α, $\beta \in \mathbb{R}$ son parámetros libres.

7. La *función Gama* se denota por $\Gamma(p)$ y se define por la siguiente integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^p \, dx.$$

La integral converge cuando $x \to +\infty$ para todo p. Si $p < 0$, el integrando no es acotado cuando $x \to 0^+$. Sin embargo se puede demostrar que la integral converge en $x = 0$ para todo $p > -1$.

(a) Prueba que para todo $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

(b) Muestra que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Prueba que si p es un entero positivo n entonces $\Gamma(n+1) = n!$. (La función Gama generaliza la función factorial.)

(d) Demuestra que si $p > 0$ entonces

$$p(p+1)(p+2)(\cdots)(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

De este modo $\Gamma(p)$ puede ser determinada para todo valor positivo de p si los valores de $\Gamma(p)$ son conocidos en un intervalo de longitud 1, por ejemplo, en $(0,1]$. Es posible probar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Encuentra $\Gamma(3/2)$ y $\Gamma(11/2)$.

8. Considera la transformada de Laplace de t^p, donde $p > -1$.

(a) En referencia al problema 8, prueba que

$$\mathcal{L}(t^p)(s) = \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

En particular, si p es un entero positivo n, se tiene que $\mathcal{L}(t^n)(s) = n!/s^{n+1}$.

(b) Prueba que

$$\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \qquad s > 0.$$

Hint: Puedes asumir que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}/2$.

(c) Prueba que

$$\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \sqrt{\pi}/(2s^{3/2}), \qquad s > 0.$$