Facultad de Ciencias, UNAM Dr. Ramón G. Plaza
Semestre 2009-II

Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 1

Fecha de entrega: 13 de febrero, 2009.

1. Un material radioactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente de dicho material. Si $Q(t)$ es la cantidad de material (por ejemplo, en miligramos) a tiempo $t > 0$ (en días), entonces

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ,$$

donde $r > 0$ es la razón de decaimiento radioactivo.

   (a) (1 pt.) La *vida media* de un material radioactivo es el tiempo requerido por cierta cantidad de material para decaer a la mitad de la cantidad inicial. Prueba que la vida media τ y la razón de decaimiento r satisfacen $r\tau = \log 2$.

   (b) (2 pts.) Si 100mg de Torio-234 decaen a 82.04mg en una semana, determina la razón de decaimiento r. ¿Cuál es la vida media del Torio-234?

2. (1 pt.) Asume que una población dobla su tamaño original después de 100 años y la triplica en 200 años. Prueba que esta población *no* satisface la ley de crecimiento de Malthus.

3. Supongamos que la población de la Cd. de México obedece la ley logística

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p(1-p),$$

donde t se mide en años y p en millones de personas, despreciando la migración y la tasa de homicidios.

   (a) (1 pt.) Modifica este modelo para tomar en cuenta el hecho de que 9000 personas por año se mudan a otro lugar, y que 1000 personas son asesinadas cada año.

   (b) (2 pts.) Si la población de la Cd. de México era de 8 millones en 1970, encuentra la población para cualquier tiempo futuro. ¿Qué sucede si $t \to +\infty$?

4. (3 pts.) Un tanque contiene 1000 litros de agua. A partir de cierto momento ($t = 0$), se empieza a vertir en el tanque contaminante industrial a razón de 1 litro por minuto, y se deja salir la mezcla de agua y contaminante exactamente a la misma razón. Encuentra la concentración de contaminante en el tanque al tiempo $t > 0$. ¿Cuanto tiempo se necesita para que la concentración de contaminante en el tanque sea de 20%?