Facultad de Ciencias, UNAM Dr. Ramón G. Plaza
Semestre 2009-II

Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 10

Fecha de entrega: 12 de junio, 2009.

1. (1 pt.) Encuentra e^A para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Prueba que si y es un vector propio de A con valor propio asociado λ, entonces y también es un vector propio asociado a e^A con valor propio e^λ. Calcula los valoes propios de las matrices e^A, donde A está dado en (1).

2. (1 pt.) Encuentra la solución al sistema

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y, \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

   y haz un esbozo de su retrato fase. Determina la estabilidad del origen.

3. (1 pt.) ¿Para qué valores de α y β el sistema

$$y' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix} y, \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

   tiene un "pozo" en el origen?

4. (1 pt.) Encuentra la solución general y dibuja su retrato fase del sistema lineal

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2. \end{aligned}$$

   ¿Qué papel juegan los vectores prpios de la matriz A asociada al sistema en el retrato fase de la solución?

5. (1 pt.) Resuelve el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y' &= Ay, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

   donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   y $y_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitraria. Determina los espacios estable e inestable y dibuja el retrato fase.

6. (1 pt.) Encuentra la matriz fundamental $\Phi(t)$, que satisface $\Phi(0) = I$, para los siguientes sistemas lineales

   (a) $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} y$,

   (b) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$.

7. (1 pt.) Resuelve el sistema lineal, no homogéneo

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

   con condición inicial

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. (1 pt.) Prueba que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t \\ e^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

   es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo, no autónomo,

$$y' = A(t)y,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

   Encuentra la inversa de $\Phi(t)$, y usa la fórmula de variación de parámetros para resolver el sistema no homogéneo

$$y' = A(t)y + b(t),$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

9. (1 pt.) Dibuja el retrato fase de la solución al sistema

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y.$$

   ¿Qué tipo de punto de equilibrio es el origen?

10. (1 pt.) Determina la estabilidad o inestabilidad de todas las soluciones a los siguientes sistemas,

$$y' = Ay,$$

   con:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.