Facultad de Ciencias, UNAM — Dr. Ramón G. Plaza
Semestre 2009-II

Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 4

Fecha de entrega: 6 de marzo, 2009.

1. (2 pts.) Considera la ecuación
$$\frac{dy}{dt} = y(y-2)(y+1)$$
Dibuja el campo de tangentes para esta ecuación y discute el comportamiento de la solución con condición inicial $y(0) = 1$. ¿Cuál es el comportamiento si $y(0) = -2$?

2. Considera la ecuación homogénea $y' + a(x)y = 0$, donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica de periodo $L > 0$, es decir, $a(x + L) = a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (a) (1 pt.) Sea v una solución no trivial de la ecuación, y sea $\psi(x) = v(x + L)$. Prueba que ψ es también solución.
   (b) (1 pt.) Prueba que existe una constante c tal que $v(x + L) = cv(x)$ para todo x. Calcula c en términos de a y de L.
   (c) (1 pt.) ¿Qué condición debe satisfacer a para que exista una solución no trivial de periodo L?

4. (1 pt.) Asumiendo que y es una función con derivada continua en $x \in [0, 1]$, que satisface la desigualdad $y' - 2y \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, con $y(0) = 1$; prueba que
$$y(x) \leq \tfrac{3}{2}e^{2x} - \tfrac{1}{2},$$
para todo $0 \leq x \leq 1$.

5. (3 pts.) Encuentra la solución a los siguientes problemas de valores iniciales:
   (a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$, $y(0) = 1$
   (b) $y' + (2/x)y = (\cos x)/x^2$, $y(\pi) = 0$, $x > 0$
   (c) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1/2$

6. (1 pt.) Prueba que si a y λ son constantes positivas, y b es cualquier número real, entonces cada solución de la ecuación
$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-\lambda t},$$
satisface $y \to 0$ cuando $t \to +\infty$. (*Hint:* Considera los casos $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$ separadamente.)