Facultad de Ciencias, UNAM

Semestre 2009-II

Dr. Ramón G. Plaza

Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 5

Fecha de entrega: 13 de marzo, 2009.

1. Supongamos que ψ satisface la ecuación $\psi' + a\psi = b_1(x)$, y que ϕ satisface $\phi' + a\phi = b_2(x)$, donde $b_1, b_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas, y a es constante.
   (a) (1 pt.) Prueba que $\xi = \psi + \phi$ satisface $\xi' + a\xi = b_1(x) + b_2(x)$.
   (b) (1 pt.) Aplica (a) para encontrar la solución de
   $$y' + y = \sin x + 3\cos(2x),$$
   cuya gráfica pasa por el origen.

2. Mediante el método de sustitución apropiado, encuentra la forma general de las primitivas o, respectivamente, resuelve el problema de valores iniciales, para las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden:
   (a) (1 pt.) (Similaridad). $x^2y' - x^2 - xy - y^2 = 0$
   (b) (1 pt.) (Bernoulli). $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, donde $\epsilon > 0$, $\sigma > 0$ y $y(0) = 1$. Esta ecuación ocurre en el estudio de estabilidad en fluídos.
   (c) (2 pts.) (Riccati). Encuentra una solución particular $y = y_r(x)$ a la ecuación
   $$y' = \frac{y^2}{\cos x} - y\tan x + \cos x.$$
   Aplica la transformación apropiada para hallar la solución general. (*Hint:* No intentes verificar que la solución final es, en efecto, solución de la ecuación diferencial.)
   (d) (2 pts.) (Inversion de y'). $(xy' - y)(yy' + x) = 2y'$. (*Hint:* Usa el cambio de variables $u = y^2, v = x^2$ y encuentra la ecuación para $du/dv = p$. El resultado es una ecuación tipo Clairaut cuya primitiva es conocida.)
   (e) (2 pts.) (D'Alembert) Encuentra todas las primitivas de la ecuación $y = -xy' + 3x^4(y')^2$.