Ecuaciones Diferenciales Parciales.
Tarea 2: Ecuación de onda

Semestre 2017-2

1. Sean v y u dos soluciones de la ecuación de onda homogénea,

$$\Box u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que $\Box(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$.

(b) Suponiendo que u es solución de $\Box u = 0$ en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, con condiciones

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde f y g son funciones de clase C^1 y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t),$$

es constante en t, donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx, \quad \text{y} \quad E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\, dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular dE/dt. Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que f, g y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en (b) demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe $T > 0$ tal que $E_{\text{cin}}(t) = E_{\text{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$.

2. Estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x,0) &= 0, & x \geq 0, \\ u_t(x,0) &= 0, & x \geq 0, \\ (u_t + \beta u_x)(0,t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es constante. Suponiendo que $\beta \neq 0$, $\beta \neq c$, usa la identidad de Green-Lagrange para determinar la solución en las regiones $x > ct \geq 0$ y $0 \leq x \leq ct$. Prueba que la solución encontrada es única, usando la identidad de Green-Lagrange o mediante el método de energía. ¿Qué pasa si $\beta = 0$? ¿Qué pasa si $\beta = c$?

3. Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt, \\ u(x,0) &= e^x, \\ u_t(x,0) &= \sin x, \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, con $c > 0$ constante.

4. Considera el siguiente *problema de Goursat*:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \qquad x > t > 0, \\ u(x,0) = e^x, \quad u(x,x) = \cos x, & \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Encuentra la solución en la región $R = \{x > t > 0\}$ y determina su dominio de dependencia para cualquier punto de R. (*Sugerencia:* Aplica el teorema del paralelogramo característico.)

5. Resuelve el siguiente problema para una cuerda semi-infinita con un extremo fijo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t &= 0, & x > 0, \\ u(0,t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-4), & |x-4| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

6. Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, & x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde f, g son suaves y de soporte compacto, demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. (*Sugerencia:* Usa la fórmula de Kirchhoff.)

7. Encuentra la solución a

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

8. Sea u la solución de $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$, para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, con datos iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Suponiendo que f y g están soportadas en la esfera compacta de radio $\rho_0 > 0$ y centro en $x = 0$, $\bar{B}_{\rho_0}(0)$, describe el soporte de la solución u para todo $t > 0$.

9. Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde $u = u(x, y, z, t)$ (es decir, en $\mathbb{R}^3$), con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2 + y^2 + z^2.$$

(a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta),$$

donde $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$.

(b) Encuentra una solución que sólo dependa de $r = |\bar{x}|$, $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para $r > 0$, $t > 0$. Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos $r \geq t$ y $r < t$.)

(c) Discute la diferenciabilidad de la solución en la curva $t = |\bar{x}|$.

(d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u_{|t=0} = u_{t|t=0} &= 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\ u_{|t=0} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_{t|t=0} &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b).

10. Considera el problema de Cauchy para la ecuación de onda en $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, & x &\in \mathbb{R}^5, t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x &\in \mathbb{R}^5, \\ u_t(x,0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R}^5. \end{aligned}$$

Definiendo las medias esféricas

$$\begin{aligned} U(x;r,t) &:= \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta, t)\, dS_\eta, \\ F(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5} \int_{|\eta|=1} f(x + r\eta)\, dS_\eta, \\ G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_5} \int_{|\eta|=1} g(x + r\eta)\, dS_\eta, \end{aligned}$$

para $r > 0$, $t > 0$, y $x \in \mathbb{R}^5$ fijo, y donde ω_5 es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^5$, sea

$$\tilde{U}(x;r,t) := r^2 U_r(x;r,t) + 3rU(x;r,t).$$

(a) Prueba que $\tilde{U}$ es solución de

$$\tilde{U}_{tt} - c^2 \tilde{U}_{rr} = 0,$$

y encuentra $\tilde{U}$ explícitamente en términos de F y G.

(b) Demuestra que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r \to 0^+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{3r} \\ &= \left(\frac{1}{3} t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t \right) G(x;ct) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t \right) F(x;ct). \end{aligned}$$

Total: 120 pts.